Universita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Bakalářská práce

PEDAGOGICKÁ
FAKULTA

Úhel v geometrii

Angle in geometry

Autor: Iveta Michálková

Vedoucí práce: Mgr. Marie Holíková, Ph.D.

Studijní program: Specializace v pedagogice

Studijní obor: Matematika se zaměřením na vzdělávání

Praha 2019

Odevzdáním této bakalářské práce na téma „*Úhel v geometrii*“ potvrzuji, že jsem ji vypracovala pod vedením vedoucí práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále potvrzuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Praze dne: 5. 7. 2019 Iveta Michálková

Ráda bych na tomto místě poděkovala Mgr. Marii Holíkové, Ph.D. za odborné vedení bakalářské práce, poskytování podnětných rad a cenných připomínek a Mgr. Michalu Zambojovi, Ph.D. za zapůjčení odborné literatury a konzultace.

Abstrakt

Tématem této práce je úhel v dějinách lidstva. Úvodní část práce je věnována prvním dochovaným zmínkám o úhlech v historii. Ve druhé a třetí části je pozornost věnována vývoji nástrojů a přístrojů umožňujících měřit úhly v praxi. Čtvrtá část se zaměřuje na problematiku zavedení úhlů v učebnicích pro základní a střední školy v České republice. Sleduje, zda jsou v jednotlivých učebnicích úhly zavedeny stejným způsobem, nebo vykazuje-li některá učebnice v tomto směru výraznější odchylku. V dalších částech se práce věnuje různým druhům úhlů a dvojicím úhlů a operacím s nimi. Pozornost je zde věnována jak početním, tak grafickým operacím s úhly. Podstatnou část práce tvoří goniometrické funkce. Práce poskytuje různé způsoby zavedení a definice goniometrických funkcí. Na příkladech předvádí využití a význam goniometrických funkcí a jejich vlastností při řešení praktických úloh. Předposlední kapitola je věnována komplexním číslům. V této části se práce zaměřuje především na komplexní čísla v goniometrickém tvaru a výpočtům s nimi. V závěrečné části práce je zařazena sbírka úloh. Celou práci uzavírají řešení a výsledky ke zmíněné sbírce. Pro zajímavost a zpestření je v práci zařazena také část, která je věnována knize s názvem Plochozemě anglického autora Edwina Abbotta. Kniha popularizuje geometrii a poskytuje netradiční pohled nejen na samotný úhel, ale i ostatní rovinné útvary.

Klíčová slova

Úhel, velikost úhlu, druhy úhlů, úhel v učebnicích, měření úhlů, přístroje na měření úhlů, goniometrické funkce, komplexní čísla

Abstract

This thesis examines the role of angle in the course of history of mankind. The introductory part of this thesis presents the historically first mentions of angles. The second and the third part pay attention to the development of tools and devices allowing practical measurement of angles. The fourth part follows the issue of introducing angle in textbooks of primary and secondary schools in the Czech Republic. It observes whether the topic of angle is imported in individual textbooks correspondingly or if the process in a textbook or textbooks differs considerably. The following parts of this thesis concentrate on various types of angles and pairs of angles and operations with them. Both arithmetic and graphic operations with angles are inspected. A substantial part of this thesis deals with trigonometric functions. This work comprises different manners of implementation and defining of trigonometric functions. Based on examples, this thesis demonstrates usage and significance of trigonometric functions and their properties in practical tasks. The penultimate chapter studies complex numbers. In this chapter, this thesis focuses primarily on complex numbers in trigonometric format and calculations with them. The final chapter holds a collection of exercises. This thesis is concluded by solutions and results to the exercise collection. One part referring to an English author, Edwin Abbott's book called Flatland, is also included in this thesis as means of curiosity and diversification. The book popularises geometry and provides non-traditional view not only on angle itself, but also on other flat structures.

Keywords

Angle, size of an angle, types of angles, angle in students, devices for measuring angles, goniometric functions, complex numbers

Obsah

Úvod

Pro zpracování bakalářské práce jsem si vybrala téma *„Úhel v geometrii"*. Toto téma jsem si zvolila proto, že mne zajímalo, kdy naši předkové úhel „objevili" a kdy a jakým způsobem s ním začali pracovat. Co je k tomu vedlo? Jak se vyvíjely nástroje a přístroje umožňující úhly měřit? Dále pak, jestli je v současných učebnicích pro základní školu úhel zaveden stejným způsobem, nebo, jsou-li v tomto ohledu nějaké výrazné rozdíly.

Úvodní část práce je věnována pojmu úhel v dějinách lidstva. Pozorování začíná v době kamenné.

Druhá, obsáhlejší část sleduje vývoj měřících nástrojů a přístrojů-od nejjednodušších až po velmi složité přístroje, které máme možnost využívat v současné době. Podává také vysvětlení, proč měříme úhly v úhlových stupních (úhlových minutách, úhlových vteřinách) a radiánech.

Třetí část práce se zabývá problematikou měření úhlu v technické praxi.

Čtvrtá, nejobsáhlejší část, podává přehled o nejčastěji užívaných učebnicích matematiky pro základní školu a o tom, jak je v nich úhel zaveden. Pro srovnání pak obsahuje ukázku ze dvou učebnic pro střední školu.

V páté části je pozornost věnována rozlišení úhlů podle velikosti a dvojicím úhlů, se kterými se ve zmíněných učebnicích setkáváme.

Další část předvádí základní operace, které se žáci základní školy učí s úhly provádět.

Značná pozornost je také věnována goniometrickým funkcím a možnostem jejich využití při výpočtech v trojúhelnících-v pravoúhlých i obecných.

Na část věnované goniometrii navazují komplexní čísla. V této kapitole je pozornost zaměřena především na komplexní čísla v goniometrickém tvaru a výpočtům s těmito čísly.

Závěrečnou část práce tvoří malá sbírka úloh k procvičení získaných znalostí a dovedností a jejich výsledky. Úlohy jsou záměrně zvoleny tak, aby odpovídaly testům přijímacích zkoušek na střední školy a dále pak maturitním didaktickým testům.

Na samém konci práce je zařazena část, která se věnuje knize nazvané Plochozemě (Flatland). Sám autor Edwin A. Abbott knihu označil za *„Román mnoha rozměrů"*, ačkoliv popisuje pouze život v rovině.

Cílem této práce je poskytnout čtenáři náhled do historie úhlu. Kdy a jakým způsobem začali naši předkové s úhlem pracovat, jaké přístroje k tomu používali (případně v současnosti stále používáme). Dalšími cíli bylo porovnat způsob zavedení pojmu úhel v učebnicích pro základní školu (poskytnout tak učitelům ZŠ pomůcku pro výběr vhodné učebnice pro výklad daného tématu), sepsat teorii úhlů (možné využít žáky základních škol, studenty středních škol, učiteli těchto škol), nabídnout možnost procvičit si teorii na příkladech ze sestavené sbírky (s možností kontroly správných výsledků). Práce je určena učitelům matematiky na základních a středních školách, případně také jejich žákům a studentům středních škol.

1. Úhel v dějinách

1. 1. Starší doba kamenná (paleolit)

Chceme-li zjistit, kde se v naší dlouhé historii poprvé setkáváme s úhlem, musíme se ponořit až do doby kamenné. Lidé tehdy žili v jeskyních a jejich život se po několik století nebo spíše tisíciletí příliš nelišil od života zvířat. Hlavní náplní jejich života bylo získávání potravy. Za tím účelem si postupně začali vyrábět nejprve zbraně vhodné k lovu i rybolovu, později nástroje pro snadnější zpracování svého úlovku. Pozvolna docházelo k rozvoji dorozumívacích schopností. Z kreseb (z doby odhadované na 15 000 let př. n. l.), které byly nalezeny především ve francouzských a španělských jeskyních, je patrné, že v té době již člověk měl pozoruhodnou schopnost vnímat tvar.

1. 2. Mladší doba kamenná (neolit)

Pro sledování pojmu úhel (i geometrie jako celku) se ukazuje velmi důležitým období neolitu (mladší doba kamenná-8 000-5 000 l. př. n. l.). Člověk opouští jeskyně. Přechází od pouhého lovení a sbírání potravy k její skutečné výrobě. Začíná se velmi intenzivně věnovat zemědělství. Ke stavbě svých domů a vyměření polí je nucen nalézt způsob, jak vyměřit úsečky a vytyčit pravé úhly. Vylepšuje a vyzdobuje si svá obydlí, splétá rohože, pálí a zdobí hrnčířské výrobky (ornamenty jsou bohaté na shodnosti, symetrie a podobnosti). [1]

Z této doby pocházejí první opravdu zřetelné stopy poznání úhlu. Bezesporu tehdy lidé znali trojúhelníky (jsou velmi častým ozdobným tvarem na různých malbách a nalezených předmětech) - tím pádem jistě i úhly. I když je možná nijak samostatně nenazývali a neoznačovali (kromě pravého úhlu, který má velmi široké užití).

Mnohé kvantitativní vztahy a geometrické útvary byly tedy správně poznány dávno před naším letopočtem. Archeologické vykopávky potvrzují, že člověk vytvořil první geometrické pojmy (i aritmetické) už v době kamenné.

S přechodem k zemědělství si lidé více než dříve začali všímat vegetačních změn a spojovat je s periodickými změnami Měsíce. Pozorovali také slunovraty a východy souhvězdí při stmívání. Užívali lunární kalendář. Věnovali se astronomii. Souhvězdí jako vodítek při mořeplavbě využívaly již primitivní národy. S rozvojem astronomie velmi úzce souvisí výrazný pokrok ve znalostech a užívání úhlů. Užívali souhvězdí jako vodítek při mořeplavbě. K tomu úhly nepostradatelně patří. Rozvoj astronomie není možný bez rozvoje matematických poznatků. Zpočátku náhodné, později stále soustavnější pozorování oblohy, vedlo k objevení vlastností směrových úhlů (také koule a kruhu). [2]

---

[1] STRUIK, Dirk Jan. *Dějiny matematiky*. Praha: Orbis, 1963. Malá moderní encyklopedie (Orbis), str. 8-18, 26-33

[2] SCRIBA, Christoph J. a Peter SCHREIBER. *5000 Years of Geometry: Matematics in History and Culture*. Basel: Projekt Group "History of Mathematics" of Hildesheim University, 2015. ISBN 978-3-0348-0897-2, str. 13-14, 25-32

1. 3. Babylónie

Pojem úhlu velmi úzce souvisí se vznikem geometrie jako vědy. Pro vznik matematické metody je rozhodující zhruba 4. století př. n. l. Tehdy postupně vznikly jednotlivé části Euklidových Základů. Tomu však předcházel dlouhý vývoj, ve kterém byly získávány jednotlivé poznatky, a byla zkoumána jejich vzájemná logická souvislost. V Egyptě a Babylónii nebyly přírodovědné znalosti (kromě astronomických) písemně zachycovány.

1. 4. Řecko

Teprve u Řeků (počínaje asi 4. stoletím př. n. l.) se objevují záznamy o jednotlivých fyzikálních poznatcích-např. geometrická optika (zákon odrazu, tzn. úhlu).

Egyptské papyry nebo babylónská matematika z doby kolem roku 2000 př. n. l. dokládá velmi vysokou úroveň znalostí. V Babylónii (název jižní části Mezopotámie v dnešním Iráku) se tehdy užívalo šedesátkové soustavy. Babyloňané pravděpodobně znali „Pythagorovu" větu více než 1000 let před Pythagorem. To svědčí o tom, že měli dosti značné základní geometrické znalosti. Široce používali pojmu podobnosti geometrických útvarů. [3]

Obrovským přínosem pro vývoj geometrie byly Základy. Ty zformuloval řecký matematik a filosof Euklides z Alexandrie zhruba kolem roku 300 př. n. l (více než 200 let po Pythagorovi). Dílo čítá 13 svazků. Jedná se pravděpodobně o nejznámější učebnici všech dob. Prvních 6 svazků je věnováno rovinné geometrii. Euklides se věnuje též úhlům. Přelomový význam této učebnice spočívá v tom, že všechna tvrzení jsou zde důkladně dokázána. Původně bylo dílo sepsáno v řečtině. Ve středověku (11.-14. st. n. l.) byly svazky v držení Arabů a byly proto přeloženy do arabštiny, v pozdním středověku (14.-15. st. n. l.) do latiny, v roce 1570 do angličtiny. Díky svým Základům je Euklides nazýván „Otcem geometrie". Základy se staly druhou nejčastěji tištěnou knihou západního světa (hned po Bibli). Po dobu 2 000 let byly nejuznávanější učebnicí. [4]

„Přírodní zákony nejsou nic jiného než matematické myšlenky od Boha." [5] -tzn., že matematika podpírá všechny přírodní zákony.

O úhlech pojednává kniha první Euklidových Základů, (Obr. 1. 1) - body 8-12:

„Rovinný pak úhel je vzájemný sklon dvou čar, v rovině se stýkajících a neležících k sobě v přímce."

„Když pak čáry úhel svírající jsou přímky, úhel zove se přímkovým."

„Když se postaví přímka na přímku tak, že sousední úhly činí navzájem stejnými, jeden i druhý z těch stejných úhlů jest pravý, a přímka postavená zove se kolmicí té, na níž jest postavena."

---

[3] HAVLÍČEK, Karel. *Cesty moderní matematiky*. 2., rozš. a přeprac. vyd. Praha: Horizont, 1976. Malá moderní encyklopedie (Horizont), str. 224-229.
[4] JIRŮTKOVÁ, Petra. Základy geometrie: Euklides jako otec geometrie. *Základy geometrie: Euklides jako otec geometrie* [online]. Praha: Khan Academy, 2016, 2016 [cit. 2019-06-26]. Dostupné z: https://khanovaskola.cz/video/48/353/264-eukleides-otec-geometrie
[5] EUKLEIDÉS. *Eukleidovy Základy [Elementa]*. Praha: Jednota českých mathematiků a fysiků, 1907, kniha 1.

„Tupý jest úhel pravého větší.“

„Ostrý pak pravého menší.“

Eukleidovy Základy.

Kniha první.

Výměry.

1. Bod jest, co nemá dílu.
2. Čára pak délka bez šířky.
3. Hranicemi čáry jsou body.
4. Přímá jest čára (přímka), která svými body táhne se rovně.
5. Plocha jest, co jen délku a šířku má.
6. Hranicemi plochy jsou čáry.
7. Rovinná jest plocha (rovina), která přímkami na ní jsoucími prostírá se rovně.
8. Rovinný pak úhel je vzájemný sklon dvou čar, v rovině se stýkajících a neležících k sobě v přímce.
9. Když pak čáry úhel svírající jsou přímky, úhel zove se přímkovým.
10. Když se postaví přímka na přímku tak, že sousední úhly činí navzájem stejnými, jeden i druhý z těch stejných úhlů jest pravý, a přímka postavená zove se kolmicí té, na níž jest postavena.
11. Tupý jest úhel pravého větší.
12. Ostrý pak pravého menší.
13. Meze jest, co jest něčeho hranicí.
14. Útvar jest, co nějaká nebo nějaké meze objímají.
15. Kruh jest útvar rovinný, objímaný jednou čarou (jež se nazývá obvodem), k níž od jednoho bodu vnitř útvaru vedené přímky všecky sobě rovny jsou.
16. Středem pak kruhu zove se ten bod.
17. Průměrem kruhu jest přímka některá vedená středem a končící se na obou stranách obvodem kruhu, jež také rozděluje kruh na polovice.
18. Polokruh pak jest útvar omezený průměrem a částí obvodu jím usečeného. Střed polokruhu je týž jako kruhu.

Frant. Servít, Eukleidovy Základy. 1

Obr. 1. 1 Eukleidovy Základy

1. 5. Úhel v goniometrii

Úhly hrají nezastupitelnou roli v goniometrii. Proto v žádném případě nelze opomenout goniometrické funkce a jejich význam. Na začátek pár slov o historii goniometrie.

Co slovo goniometrie znamená? Co si pod ním představit?

Toto označení pochází původně z řečtiny a vzniklo spojením dvou částí: gónia (úhel) + metró (měřím). Jedná se tedy o kapitolu z matematiky, která se zabývá měřením úhlů a jejich výpočty. Hlavním prostředkem, kterého se při těchto výpočtech využívá, jsou goniometrické funkce.

Již jsem se zmínila o tom, že již Egypťané a Babyloňané měli značné poznatky o úhlech. Bezesporu je možné říci, že právě oni položili základy goniometrie (matematické disciplíny zabývající se goniometrickými funkcemi). Jejich hlavním zájmem byla trigonometrie (trigónon = trojúhelník). Tento podobor goniometrie, jenž využívá goniometrických funkcí při řešení úloh o trojúhelnících, pro ně byl velmi důležitým. Nezbytně jej potřebovali v zeměměřictví, astrologii, navigaci, atd. Nápisy na zhruba 3 700 let staré desce nazvané Plimpton 322 (Obr. 2. 1) (australští vědci jsou přesvědčeni, že se jim je konečně podařilo rozluštit) dokazují, že Babyloňané již v té době (více než 1 000 let před Řeky) znali trigonometrii. Tabulka obsahuje sérii 15 takových pravoúhlých trojúhelníků, že první trojúhelník je rovnoramenný. U každého dalšího ze čtrnácti trojúhelníků jedna odvěsna zůstává stejná, druhá se zkracuje. Tímto způsobem se postupně zmenšuje úhel mezi přeponou a pevnou odvěsnou.

Goniometrickými funkcemi a výpočty jejich hodnot se pravděpodobně jako první zabýval Hipparchos z Nikaje (zhruba 150 let př. n. l.). Porovnával délky oblouku kružnice při daném středovém úhlu s délkami jim odpovídajících tětiv. Jeho dílo výrazně rozšířil Ptolemaios (odvodil vzorce odpovídající dnešním $\sin(\alpha+\beta), \sin(\alpha-\beta)$). K velkému pokroku pak přispěli Indové a Arabové. Ve 4.-5. století byla poprvé uvedena definice sinu jako poměru mezi polovinou úhlu a polovinou sečny. Dnes používané slovo sinus pochází z latinského výrazu pro záhyb nebo zátoku. Vzniklo nesprávným překladem ve významu „půltětiva“. Zhruba v 10. století již Arabové používali všechny goniometrické funkce. Pro sinus a tangens měli tabulky s přesností na 8 desetinných míst pro úhly vzdálené od sebe o čtvrtinu stupně.

Zajímavostí je, že ačkoliv dnes při výpočtech používáme častěji funkci tangens (především proto, že na kalkulačkách kotangens není a výpočet je proto komplikovanější), v historii matematiky se objevil dříve kotangens. Funkce kotangens byla známa již zhruba v 9. století. Tangens se poprvé objevil až v druhé polovině 16. století v díle Regiomontana. Teprve koncem 16. století byly goniometrické funkce definovány tak, jak je dnes především známe-tzn. přes pravoúhlé trojúhelníky (v díle Opus palatinum de triangulis). [6]

1. 6. Úhel v komplexních číslech

Velmi důležitou roli hrají úhly v komplexních číslech. Komplexní čísla tvoří číselný obor, který vznikl rozšířením oboru reálných čísel. Jejich název pochází z latinského slova *complexus*, tzn. složený. Poprvé se s nimi setkáváme pravděpodobně v díle italského matematika Gerolama Cardana, který žil v letech 1501-1576. Na jeho dílo navázali Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), Abraham de Moivre (1667-1754). Leonhard Paul Euler (1707-1783) zavedl označení pro imaginární jednotku. Na konci 18. století německý matematik Carl Friedrich Gauss (1777-1855) zavedl způsob znázorňování komplexních čísel v rovině. [7]

Obor komplexních čísel vznikl z potřeby řešení rovnic, které by v oboru reálných čísel řešení neměla, nebo neměla příslušný počet kořenů, tj. tolik kořenů, jaký je stupeň rovnice.

---

[6] FLOROVÁ, Hana. *Goniometrie v učivu středních škol* [online]. Brno, 2012 [cit. 2019-07-02]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/j2lpg/Diplomova_prace.pdf. Diplomová práce. Masarykova Univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce RNDr Pavel Šišma, Dr.

[7] RYBÁKOVÁ, Tereza. *Zavedení komplexních čísel v dějinách algebry* [online]. Praha, 2016 [cit. 2019-07-05]. Dostupné z: file:///C:/Users/Iveta/AppData/Local/Temp/BPTX_2014_2_11410_0_384279_0_166416.pdf. Bakalářská. Pedagogická fakulta UK. Vedoucí práce Prof. RNDr Ladislav Kvasz, DSc. Dr.

2. Historie měření úhlů

Chceme-li mluvit o úhlu, nemůžeme opominout vývoj způsobů měření úhlů a jednotky velikosti úhlů.

Nejnovější metody a přístroje nám umožňují spolehlivě měřit úhly ve zlomcích vteřin oblouku (opticky i elektronicky). Vždy to tak ale nebylo.

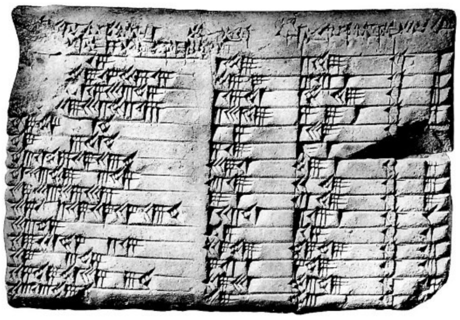
Z počátku byly úhly měřeny primitivními metodami. V důsledku požadavku na zvýšení přesnosti, se badatelé předháněli v navrhování způsobů, jak dosáhnout co nejlepšího možného měření. Největšího pokroku pak bylo dosaženo především od konce 20. století do dneška.

2. 1. Jednotky velikosti úhlů-stupňová míra

V roce 1936 byla v Íránu, nedaleko starobylého města Babylon (hlavní město Mezopotámie = označení pro oblast mezi řekami Eufrat a Tigris) nalezena hliněná deska (Obr. 2. 1) s neznámým textem (pocházejícím pravděpodobně z období kolem 4 000 př. n. l). Tento text byl rozluštěn až v roce 1950.

Babylonským vědcům byl znám fakt, že obvod hexagonu je přesně šestkrát větší než poloměr ohraničeného kruhu. To byl s největší pravděpodobností důvod, proč se rozhodli rozdělit kruh na 360 stejných dílů (odtud 360°).

Srovnávali zenit přímo nad hlavou s nekonečným obzorem. Mezi zenitem a horizontem byl pravý úhel. Dva pravé úhly tvořily celý oblouk nebeské klenby, a tedy polovinu kružnice. Není zcela jasné, proč Babyloňané zvolili číslo 360 pro určení úhlu celé kružnice. Každopádně zvolili číslo, které bylo velmi dobře dělitelné, a proto vhodné pro vyjadřování menších úhlů a zlomků úhlů. Během staletí se přesnost přístrojů na měření úhlové vzdálenosti mezi objekty stále zvyšovala. Kvadranty měly velikost čtvrtiny celé kružnice (90°), sextanty tvořily šestinu kružnice (60°) a oktanty pak zaujímaly jednu osminu (45°) celé kružnice.



[8]

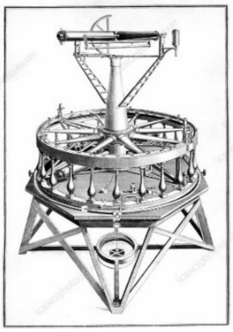
Obr. 2. 1 Plimton 322 - hliněná deska zobrazující matematické symboly

8 Plimton 322. In: *Daily.jstor.org* [online]. 2016, 17.3.2016 [cit. 2016-03-17]. Dostupné z: https://daily.jstor.org/advanced-mathematics-of-ancient-babylon/

Nápis na desce (nazvaná Plimpton 322-3700 let stará) vyjadřuje poměr obvodu pravidelného šestiúhelníku k délce kružnice. (Odtud pak odvodili π = 25/8 = 3,125.) To je důkazem, že Babyloňané používali sexázický systém-založený na 60 (nikoli centenzimální systém-založený na jednotkách 10) a také, že už velmi dobře znali trigonometrii (a tedy také úhly). [9]

Pro přesnější měření se pak užívají jednotky nazvané úhlové minuty (1° = 60´), případně úhlové vteřiny (1´ = 60´´).

Dělení kruhu s velkou přesností bylo dlouhotrvajícím problémem. V roce 1793 panovala představa, že nejpřesnější možné měření od dob antického matematika, astronoma, astrologa Claudia Ptolemaia (85-165 l. n. l.) do časů polského astronoma a matematika Mikuláše Koperníka (1473-1543) je dělení na 5-10 úhlových minut. Dánský astronom a astrolog Tycho de Brahe (1546-1601) ho snížil na 1 minutu, polskému astronomovi Johannesu Heveliovi (1611-1687) se to podařilo na 15-20 vteřin. Anglický hodinář Georg Graham (1673-1751) dosáhl přesnosti měření na 7-8 vteřin. V roce 1773 se podařilo londýnskému vynálezci Jessi Ramsdenovi (1735-1800) vyrobit přístroj teodolit (Obr. 2. 2), s jehož pomocí dokázal kruh opakovaně rozdělit s přesností na 3 vteřiny. [10]


[11]

Obr. 2. 2 Ramsdenův teodolit-vědecké muzeum v Londýně

Na výrobu teodolitů se zaměřila řada různých firem. S postupem a vývojem nových technologií (optické teodolity) došlo v 20. a 21. století k sestrojení spousty typů teodolitů s velmi přesným měřením úhlů.

[9] PAVLÍK, Jan. Trigonometrie: Nejstarší důkaz trigonometrie. *Trigonometrie: Nejstarší důkaz trigonometrie* [online]. Praha: Suenee Universe, 2018, 2018 [cit. 2019-07-02]. Dostupné z: https://www.suenee.cz/nejstarsi-dukaz-trigonometrie-na-3700-let-stare-babylonske-tabulce/

[10] Dějiny zeměměřičství: Úhly a úhloměrné přístroje. *Dějiny zeměměřičství: Úhly a úhloměrné přístroje* [online]. Ostrava: Hornicko-geologická fakulta VŠB-TU, 2019, 2019 [cit. 2019-07-02]. Dostupné z: https://docplayer.cz/68538019-Dejiny-zememerictvi-zakladni-geodeticke-veliciny-a-jejich-mereni-rndr-ladislav-planka-csc.html

[11] Ramsdenův Teodolit. In: *Sciencephot.com* [online]. 2019, 1. 3. 20196 [cit. 2019-06-06]. Dostupné z: https://www.google.com/search?tbm=isch&source=hp&biw=1366&bih=664&ei=s0T5XIXoGsOQmwWMu66IDg&q=Ramsden+Great+Theodolite&oq=Ramsden+Great+Theodolite&gs

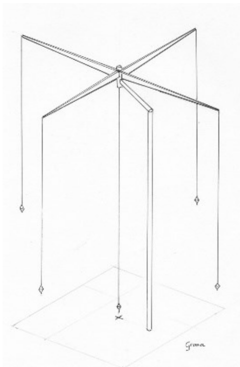
2. 1. 1. Groma

Historie matematického měření úhlů ve stupňové míře pravděpodobně pochází přibližně z roku 1500 př. n. l. V Egyptě k měření využívali stín slunce zobrazený na kamenném stole. Jak takové měření probíhalo je zobrazeno na deskách, které je možné spatřit v egyptském muzeu v Berlíně

Prvním známým nástrojem na měření úhlu byl pravděpodobně egyptský Groma používaný při budování obrovských staveb, jako jsou pyramidy. Sloužil k vytyčování pravých úhlů. Jeho použití bylo výrazně omezeno tím, že přístroj bylo možné využít jen na poměrně plochý terén. Přesnost měření byla navíc značně limitována vzdáleností.

Od Egypťanů přejali tento nástroj Římané. Ačkoliv byl Groma jedinou pomůckou umožňující měřit úhly, kterou měli k dispozici, dokázali Římané pomocí pravých úhlů zvládnout i složité vytyčovací úlohy, např. kruhové či eliptické amfiteátry nebo ražení tunelů. Pro stavby vytyčené na přímkách (silnice) byl ideálním nástrojem.

Groma se skládal ze čtyř kamenů zavěšených na dvou tyčkách, které byly spojeny v pravém úhlu (Obr. 2. 3).


[12]

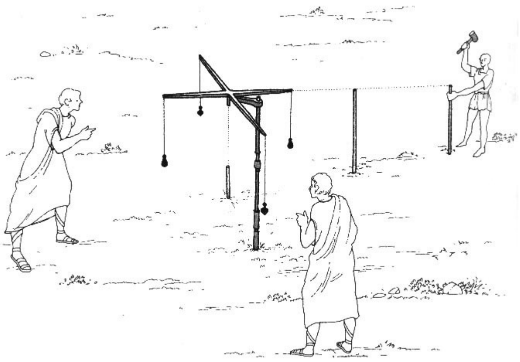
Obr. 2. 3 Model egyptského Gromy

Měření bylo prováděno tak, že bylo nutné Gromu umístit průsečíkem nad místo, kde měl být pravý úhel. Ramena kříže pak tento úhel vyměřila. (Obr. 2. 4) [13]

---

[12] Model egyptského Gromy. In: *Romanaquects.info* [online]. 2004 [cit. 2019-08-06]. Dostupné z: http://www.romanaqueducts.info/technicalintro/surveyingtools.htm

[13] SHELL-GELLASH, Amy. Hands on History: A Resource for Teaching Mathematics. *Hands on History: A Resource for Teaching Mathematics* [online]. United States of America: The Mathematical Association of America, 2007, 2007 [cit. 2019-07-09]. Dostupné z: https://books.google.cz/books?id=V3SYQ-hOFzgC&pg=PT125&lpg=PT125&dq=egyptsk%C3%BD+groma&source=bl&ots=fsztgMWbdw&sig=ACfU3U2X97CODF934f0X3Du4f3KYBxizXA&hl



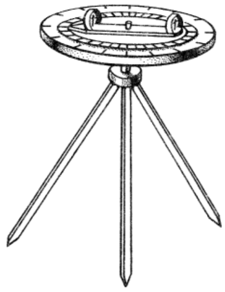
[14]

Obr. 2. 4 - Vyměřování pravého úhlu pomocí Gromy

Když byly v roce 1912 vykopány Pompeje, byly objeveny verze Gromy, které jsou zhotovené z železného nosiče s bronzovým závažím. [15]

2. 1. 2. **Dioptr** (Dioptra)

Pravděpodobně prvním opravdovým nástrojem na měření úhlů byl Dioptr (Obr. 2. 5) (řecké slovo = průzor; v současné době je znám především jako zaměřovací pomůcka, mířidlo zbraní). Pochází zhruba z roku 1 500 př. n. l. Z popisu Herona Alexandrijského (10-70 l. n. l.) vyplývá, že dioptr lze považovat za předchůdce teodolitu (geodetický přístroj k měření a vytyčování vodorovných a svislých úhlů).



[16]

Obr. 2. 5 Model Dioptru

[14] Vyměřování pravého úhlu pomocí Gromy. In: *Muelaner.com* [online]. 2013, 18. 7. 2013 [cit. 06-06-2019]. Dostupné z: https://www.muelaner.com/measurement/make-a-simple-groma/

[15] MUELANER, Jody. Simplifying complexity: Make a simple Groma. *Simplifying complexity: Make a simple Groma* [online]. Bristol: Dr Jody Muelaner, 2013, 18.7.2013 [cit. 2019-06-22]. Dostupné z: https://www.muelaner.com/measurement/make-a-simple-groma/

[16] Model Dioptru. In: *Ancientrome.ru* [online]. 1989, 27. 5. 1989 6. června 2019 19:23:07 [cit. 2019-06-06]. Dostupné z: https://www.google.com/search?tbm=isch&source=hp&biw=1366&bih=664&ei=BUv5XLKEGpKDk74PlK6TyA0&q=dioptra&oq=dioptra&gs

Tento přístroj byl složen z velké kruhové kovové desky, která byla rozdělena na stupně. Deskou bylo možné otáčet vodorovně o 360° ozubeným kolem a z další desky, kterou bylo možné přístroj naklonit ve svislé rovině pomocí čepu. K deskám bylo možné připojit vyrovnávací zařízení. Vodorovná deska mohla být zarovnána kovovou lištou s dvojicí otevřených mířidel. Celý přístroj byl namontován na těžkém dřevěném podstavci. [17]

Měření se provádělo tak, že se mířidly zaměřilo na pozorovaný objekt. Odpovídající úhel byl odečten na znázorněné stupnici.

2. 1. 3. **Trikvetr** (Trikvetra)

Velkým přínosem v měření úhlů byl vynález řeckého matematika, astrologa a geografa Claudia Ptolemaia (85-165 n. l.) nazvaný Trikvetr. Bylo to zařízení složené ze tří tyčí. Jedna byla zasazena svisle do země. Další dvě byly pohyblivé. Na jedné z pohyblivých částí byly dva průzory, na druhé stupnice.

Trikvetrem bylo možné pozorovat hvězdy a planety. V pozdějších dobách byl využíván armádou při terénních průzkumech. Měření se provádělo tak, že průzory se zamířilo na pozorovaný objekt. Rameny Trikvetru se pohybovalo takovým způsobem, aby ramena společně s pevnou vertikální tyčí vytvořila rovnoramenný trojúhelník. Na stupnici se pak odečetla vzdálenost.

Trikvetr byl přímým předchůdcem dalších přístrojů, především Kvadrantu, Sextantu a Oktantu. U těchto přístrojů bylo rameno se stupnicí nahrazeno částí kruhu. U Kvadrantu to bylo čtvrtinou u Sextantu šestinou, u Oktantu osminou. [18]

2. 1. 4. **Astroláb**

Prvním ručním navigačním přístrojem byl Astroláb (Obr. 2. 6). Umožnil určit polohu na moři. Široké využití měl i při vyměřování při stavebních pracích.

[19]

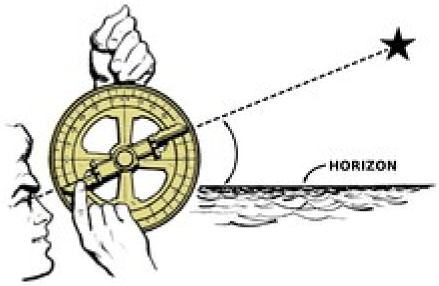
Obr. 2.6 Astroláb

[17] Ancient History and Civilisation: Greek and Roman Surveying and Surveying Instruments. *Ancient History and Civilisation: Greek and Roman Surveying and Surveying Instruments* [online]. Mainz, 1998, 1998 [cit. 2019-06-22]. Dostupné z: https://erenow.net/ancient/ancient-perspectives/6.php

[18] Fyzmatik: Středověké GPS. *Fyzmatik: Středověké GPS* [online]. Praha: Fyzmatik, 2009, 19.5.2009 [cit. 2019-06-22]. Dostupné z: http://fyzmatik.pise.cz/892-stredoveke-gps-kvadranty-a-sextanty.html

[19] Astroláb. In: *Algernon.webzdarma.cz* [online]. 2002 [cit. 2019-08-06]. Dostupné z: https://www.google.com/search?tbm=isch&source=hp&biw=1366&bih=664&ei=zVz7XJS-GKGEmwXu445I&q=astrol%C3%A1b&oq=astrol%C3%A1b&gs_ kmZsyM#imgrc=u8buwFflOWk6iM

Postup při měření pomocí astrolábu je znázorněn na (Obr. 2.7).



[20]

Obr. 2.7 Měření úhlu nebeského tělesa nad horizontem použitím Astrolábu

Principy, na kterých byl založen Astroláb, byly známy již před 150 lety př. n. l. První doložený Astroláb však pochází až z doby zhruba kolem roku 400 n. l. Velmi hojně jich využívali v maurském světě kolem roku 800 n. l. Odtud se později (začátek 12. st.) rozšířil do Evropy, kde byl nejpopulárnějším astronomickým nástrojem až do 17. století, kdy jej nahradil Sextant (Obr. 2. 11). U nás nejznámějším je pravděpodobně Astroláb, který je umístěný na orloji na Staroměstské radnici.

2. 1. 5. Kvadrant

Základ Kvadrantu tvořil čtvrtkruh se stupnicí na obvodu oblouku. Na jedné z hran kvadrantu byly umístěny dva průzory. Ve vrcholu čtvrtkruhu byla zavěšena šňůrka se závažím (většinou olověným). Měření Kvadrantem se provádělo tak, že se průzory zaměřilo na objekt. Šňůrka pak ukázala příslušný úhel na stupnici. (Obr. 2. 8)

[21]

Obr. 2. 8 Použití Kvadrantu z roku 1767

Kresba je umístěna v Námořnickém muzeu

20 Měření astrolábem. In: *Wikiwand.com* [online]. 2018, 23. 8. 2018 [cit. 2019-06-08]. Dostupné z: https://www.google.com/search?tbm=isch&source=hp&biw=1366&bih=664&ei=amD7XOewOdGQmwWLnJJ4&q=m%C4%9B%C5%99en%C3%AD+atrol%C3%A1bem&oq=m%C4%9B%C5%99en%C3%AD+atrol%C3%A1bem&gs_#imgrc=CVpP0BzTUYwK1M:

21 Použití kvadrantu. In: *vesmir.cz* [online]. 2018, 10. 1. 2018 21. června 2019 20:12:37 [cit. 2019-06-21]. Dostupné z: https://vesmir.cz/cz/on-line-clanky/2018/10/velke-umeni-astronavigace-od-astrolabu-po-sextant.html

2. 1. 6. Sextant a Oktant

Princip, na kterém je měření oběma přístroji založeno, objevil pravděpodobně již koncem 17. století Isaac Newton. Svůj vynález, bohužel, nezveřejnil. Proto byl objev připsán dvěma vynálezcům, kteří dospěli ke stejnému závěru nezávisle na sobě zhruba v roce 1730. Těmito vynálezci byli anglický matematik John Hadley a americký optik Thomas Godfrey.

Dříve se začal používat Oktant, později Sextant. Oba přístroje jsou v podstatě stejné. Liší se pouze velikostí stupnice a rozsahem měřitelných úhlů. Oktantem bylo možné měřit úhly do velikosti 90°, Sextantem do 120° (Obr. 2. 9). Původně byly na přístrojích umístěny průzory. Až později byly vybaveny dalekohledy. Tím došlo k výraznému zpřesnění měření. [22]

[23]

Obr. 2. 9 Sextant

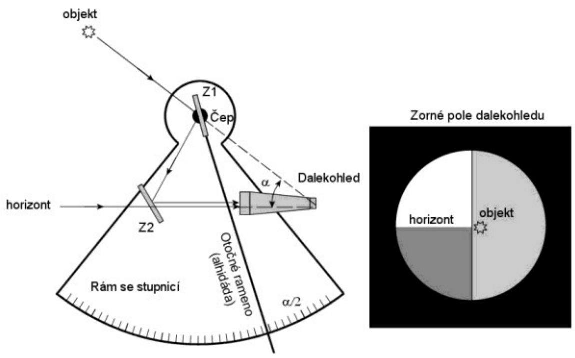
Způsob měření je znázorněn na (Obr. 2. 10). Paprsek od objektu (hvězdného) se odráží od zrcátka Z1, potom od zrcátka Z2. Následně dopadá do dalekohledu. Stejně tak paprsek od horizontu se nejprve odráží od zrcátka Z1 a poté dopadá do dalekohledu. Pohled v dalekohledu je znázorněn v pravé části (Obr. 2. 12). Zorné pole je zde rozděleno na poloviny. V levé části je obraz horizontu, v pravé odraz oblohy objektu. V okamžiku, kdy se pohybem otočného ramene podaří dostat horizont a objekt na stejnou úroveň, ukazuje přístroj úhlovou výšku objektu. [24]

---

[22] Fyzmatik: Středověké GPS. *Fyzmatik: Středověké GPS* [online]. Praha: Fyzmatik, 2009, 19.5.2009 [cit. 2019-06-22]. Dostupné z: http://fyzmatik.pise.cz/892-stredoveke-gps-kvadranty-a-sextanty.html

[23] Sextant. In: *Oceanusbrass.com* [online]. 2019 [cit. 2019-06-08]. Dostupné z: https://www.google.com/search?tbm=isch&source=hp&biw=1366&bih=664&ei=S2L7XIbUJOyFmwXS773YBA&q=sextant&oq=sextant&gs_l=img.

[24] SCHEIRICH, Petr. Vesmír: Velké umění astronavigace: Od astrolábu po sextant. *Vesmír: Velké umění astronavigace: Od astrolábu po sextant* [online]. Praha: WebActive, 2018, 1. 10. 2018, **2018**(10) [cit. 2019-06-21]. ISSN 1214-4029. Dostupné z: https://vesmir.cz/cz/on-line-clanky/2018/10/velke-umeni-astronavigace-od-astrolabu-po-sextant.html



[25]

Obr. 2. 10 Použití Sextantu

2. 1. 7. Teodolit

V roce 1571 nacházíme první zmínku o přístroji nazvaném Teodolit. Objev byl připsán anglickému matematiku a geodetovi Leonardu Diggesovi (1515-1559). Zveřejnil ho však až Diggesův syn Thomas Diggest v knize nazvané Pantometria.

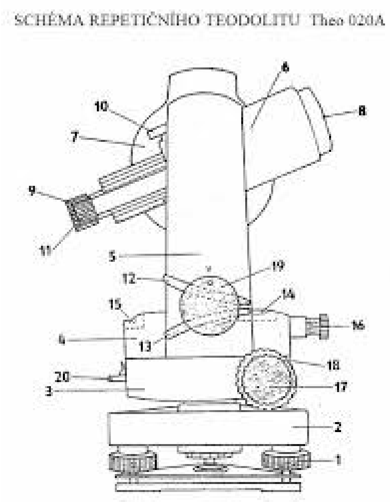
První přístroj ve smyslu dnešního Teodolitu sestrojil až v roce 1720 John Sisson. Dalším významným konstruktérem byl Jesse Ramsden, který teodolit sestrojil v roce 1773. Přístroj prošel řadou velkých změn a zdokonalení. Využívá se dodnes. Na výrobu teodolitů se zaměřila řada různých firem-v Čechách v první polovině 20. století firma Josef a Jan Frič Praha (později přejmenovaná na firmu Meopta), ve světě například Carl Zeiss Jena (Německo), Nikon (Japonsko), atd. S postupem a vývojem nových technologií (optické teodolity) došlo v 20. a 21. století k sestrojení spousty typů teodolitů s velmi přesným měřením úhlů. [26]

Teodolit je přístroj na přesné měření a vytyčování vodorovných a výškových úhlů, skládá se ze tří základních částí-trojnožka (slouží k horizontaci přístroje), limbus (vodorovný kruh s se stupnicí), alhidáda (horní otočná část, na níž je umístěn dalekohled). (Obr. 2. 11)

[25] Použití Sextantu. In: *vesmir.cz* [online]. 2018, 10. 1. 2018 [cit. 2019-06-21]. Dostupné z: https://vesmir.cz/cz/on-line-clanky/2018/10/velke-umeni-astronavigace-od-astrolabu-po-sextant.html

[26] WALLIS, David A. History of Technology: History of Angle Measurement. *History of Technology: History of Angle Measurement* [online]. Cairo, Egypt: Pfaraohs to Geoinfrmatics, 2005 [cit. 2019-02-01]. Dostupné z: https://www.fig.net/resources/proceedings/fig_proceedings/cairo/papers/wshs_01/wshs01_02_wallis.pdf

1 stavěcí šroub
2 trojnožka
3 limbus
4 alhidáda
5 dalekohledová vidlice
6 dalekohled
7 svislý kruh
8 objektiv
9 okulár
10 hledáček dalekohledu
11 odečítací mikroskop
12 hrubá ustanovka svislého kruhu



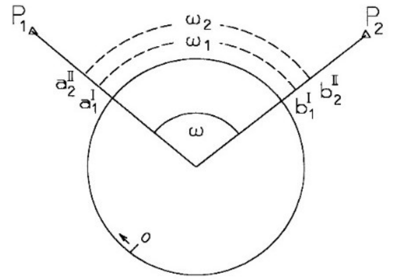
[27]

13 hrubá ustanovka vodorovného kruhu
14 alh. libela trubicová
15 alh. libela krabicová
16 optický centrovač
17 jemná ustanovka vodorovného kruhu
18 jemná ustanovka svislého kruhu
19 vypínač obrazu svislého kruhu
20 repetiční svora

Obr. 2. 11 Schéma repetičního teodolitu

Z obrázku (2. 11) je zřejmé, že Teodolit je oproti dříve jmenovaným přístrojům složitý. I postup měření úhlů s ním je složitější. Před samotným měřením je vždy nezbytné přístroj k měření připravit-svislá osa musí procházet vyznačeným bodem v terénu.

Měření se provádí ve dvou polohách dalekohledu. Ten se nejprve zacílí v I. poloze na cíl P_1, poté se otočí alhidádou po směru pohybu hodinových ručiček a zacílí na objekt P_2. Po tomto měření se dalekohled položí do II. polohy a měření se zopakuje-jen s tím rozdílem, že prvně se zacílí na objekt P_2. Na to se otočí alhidádou tentokrát proti směru pohybu hodinových ručiček a dalekohled se zacílí na bod P_2. (Obr. 2. 12). Při každém z těchto měření měřič obdrží úhel ω_1 (v případě prvního měření), ω_2 (v případě druhého měření). Výsledný úhel pak vznikne jako aritmetický průměr úhlů ω_1, ω_2 $\left(\omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$. [28]



[29]

Obr. 2. 12 – Měření vodorovného úhlu Teodolitem

[27] Schéma repetičního Teodolitu. In: *Uhulag.mendelu.cz* [online]. 2013 [cit. 2019-06-22]. Dostupné z: http://uhulag.mendelu.cz/files/pagesdata/cz/geodezie/geodezie1/mereni_uhlu.pdf

[28] ČÁBELKA, M. Seminář z geoinformatiky: Měření vodorovných úhlů. *Seminář z geoinformatiky: Měření vodorovných úhlů* [online]. Praha: PřF UK [cit. 2019-06-22]. Dostupné z: https://www.natur.cuni.cz/geografie/geoinformatika-kartografie/ke-stazeni/vyuka/seminar-z-geoinformatiky/prednasky/9.-mereni-uhlu

[29] Měření vodorovného úhlu Teodolitem. In: *Natur.cuni.cz* [online]. 2012, 15. 3. 2012 [cit. 2019-05-23]. Dostupné z: https://www.natur.cuni.cz/geografie/geoinformatika-kartografie/ke-stazeni/vyuka/seminar-z-geoinformatiky/prednasky/9.-mereni-uhlu

Obrázky (Obr. 2. 13, 2. 14) naznačují, jakým vývojem Teodolit prošel.

[30]

Obr. 2. 13 Teodolit z roku 1850

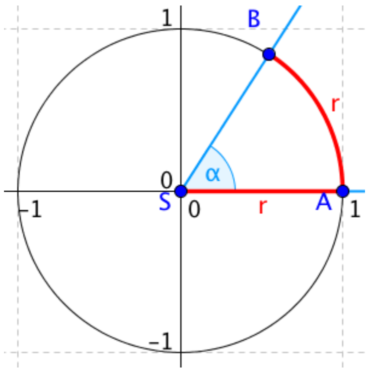
[31]

Obr. 2. 14 Digitální Teodolit

2. 2. Jednotky velikosti úhlů – oblouková míra

Kromě stupňové míry (úhlové stupně, minuty, vteřiny) je možné k vyjádření velikosti úhlu použít také obloukovou míru. Její jednotkou je radián (1 rad).

K zavedení a představě radiánu využijeme jednotkovou kružnici, tj. kružnici s poloměrem 1. (Obr. 2. 15)



[32]

Obr. 2. 15 Radián na jednotkové kružnici

Délka vyznačeného oblouku *AB* je stejná jako poloměr kružnice, tj. v tomto případě 1. Úhel *ASB* pak má velikost 1 rad. Je potřebné zdůraznit, že nejde o délku úsečky *AB*, ale opravdu o délku oblouku *AB* (odtud oblouková míra). [33]

[30] Teodolit z roku 1850. In: *Dorotheum.cz* [online]. 2014, 5. 5. 2014 22. června 2019 17:41:52 [cit. 2019-06-22]. Dostupné z: https://www.dorotheum.com/cz/l/3871111/

[31] Digitální teodolit. In: *Plastmark.cz* [online]. 2002, 29. 3. 2002 [cit. 2019-06-18]. Dostupné z: https://www.plastmark.cz/teodolit-digitalni-south-et-02

[32] Radián. In: *Howlingpixel.com* [online]. 2019 [cit. 2019-04-23]. Dostupné z: https://howlingpixel.com/i-cs/Radi%C3%A1n

[33] Radián*: Radián* [online]. Praha: Howling Pixel, 2019, 2019 [cit. 2019-07-04]. Dostupné z: https://howlingpixel.com/i-cs/Radi%C3%A1n

S myšlenkou na zavedení úhlové jednotky, která velikostí odpovídá jednomu radiánu, se poprvé setkáváme pravděpodobně v roce 1714 u Rogera Cotese. Název radián však poprvé použil až o více než 150 let později (v roce 1873) Jameson Thomson. [34]

2. 3. Vztah mezi jednotkami stupňové a obloukové míry

Oblouk kružnice má délku *r* (poloměr kružnice) (Obr. 2. 15). Celá kružnice má délku $O = 2\pi r$. Na kružnici tedy můžeme nanést 2π oblouků o velikosti *r*. Můžeme napsat:

$$360° = 2\pi\, rad \qquad\qquad 180° = \pi\, rad$$

π (čteme *pí*) je matematická konstanta, která udává poměr obvodu *O* jakéhokoli kruhu a jeho průměru d ($O = \pi d$, protože průměr kruhu je dvojnásobkem poloměru téhož kruhu, dostaneme zmíněný vztah $O = 2\pi r$). Tuto konstantu nazýváme Ludolfovým číslem na počest německého matematika Ludolpha van Ceulena (1540-1610), který výpočtu hodnoty tohoto čísla věnoval značnou část svého života. Dokázal ji určit s přesností na 35 desetinných míst. Po jeho smrti mu byla tato hodnota dokonce vytesána na náhrobní kámen.

Řecké písmeno π pro označení tohoto čísla použil poprvé velšský matematik William Jones v roce 1706 jako zkratku řeckého slova pro obvod (řecky perimetros). Označení zpopularizoval v roce 1737 švýcarský matematik a fyzik Leonhard Euler. V anglické literatuře se používá spíše označení Archimédova konstanta. [35]

Jednotku *rad* často vynecháváme a píšeme pouze úhel o velikosti například $2\,\pi$.

$$360° = 2\pi \qquad\qquad 180° = \pi$$

Vztah mezi jednotkami je možné přibližně vyjádřit takto:

$$1rad = 57°17'45'' \qquad\qquad 1° = \frac{\pi}{180} rad$$ [36]

Tabulka důležitých hodnot velikostí úhlů								
Velikost úhlu								
Stupňová míra	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Oblouková míra	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

---

[34] School of Mathematics and statistics: Roger Cotes. *School of Mathematics and statistics: Roger Cotes* [online]. Scotland: University of St. Andrews, 2005, 2005 [cit. 2019-07-04]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Cotes.html

[35] ŠKÁPÍKOVÁ, Jitka. *Česky a hezky: Ludolfovo číslo* [online]. 26.5.2015 [cit. 2019-07-02]. Dostupné z: https://www.rozhlas.cz/cesky/puvodslov/_zprava/ludolfovo-cislo--1580858

[36] MOTYČKOVÁ, Marie. Goniometrie a trigonometrie: Využití internetu ve výuce goniometrie na střední škole. *Goniometrie a trigonometrie: Využití internetu ve výuce goniometrie na střední škole* [online]. Praha: Matematicko-fyzikální fakulta UK, 2006, 2006 [cit. 2019-02-26]. Dostupné z: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/motyckova/Stranky_s_aplety/Velikost_uhlu.html

2. 4. Setinná míra

Kromě stupňové a obloukové míry je možné k vyjádření velikosti úhlu použít také setinnou míru. Ta je definována tak, že pravý úhel (90°) je rozdělen na 100 dílů. Ty potom nazýváme gony nebo také grady, či setinné stupně.

Setinný stupeň (1^g) se dále dělí na 100 setinných minut (1^c), tzn., že $1^g = 100^c$, setinnou minutu můžeme rozdělit na 100 setinných vteřin (1^{cc}), tzn., že$1^c = 100^{cc}$.

Vztah mezi setinnou a obloukovou mírou je vyjádřen takto: $\boldsymbol{1^g = \frac{\pi}{200} rad}$ [37]

Setinné míry se využívá zřídka. Na základní ani střední škole se nevyučuje.

3. Měření úhlů v technické praxi

V technické praxi se velikost rovinného úhlu udává ve stupních, které se dělí na minuty a vteřiny. Úhly se měří buď přímo úhloměry, úhelníky, úhlovými měrkami apod., nebo nepřímo tím, že se určí jiné rozměry a velikost úhlu se z nich vypočítá.

3. 1. Přímé měření úhlů

<u>Úhelníky</u>

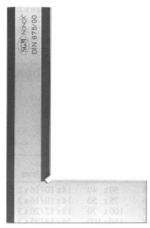
V praxi se nejčastěji setkáváme s potřebou zkontrolovat, zda je měřený úhel pravý. K tomu účelu se využívají pevné úhelníky (Obr. 3. 1-3. 3). Úhelníky není možné měřit velikosti úhlů. Slouží pouze ke kontrole, zda je daný úhel pravý, či k vytyčení pravého úhlu. Úhelník se jednou hranou přiloží ke zkoumanému předmětu. Pokud je úhel pravý, druhé rameno pravého úhlu se přesně kryje s druhou hranou předmětu.


[38]

Obr. 3. 1 Plochý úhelník


[39]

Obr. 3. 2 Příložný úhelník


[40]

Obr. 3. 3 Nožový úhelník

[37] BRŮNA, Vladimír. Základy geodézie. *Základy geodézie* [online]. Ústí nad Labem: Katedra informatiky a geoinformatiky FŽP UJEP, 2008, 2008 [cit. 2019-06-26]. Dostupné z: https://moodle.fzp.ujep.cz/mod/resource/view.php?id=4128

[38] Plochý úhelník. In: *Bo-import.cz* [online]. 2015 [cit. 2019-06-10]. Dostupné z: https://www.bo-import.cz/meridla/uhelniky/uhelniky-ploche/uhelnik-presny-plochy-typ-kaleny

[39] Příložný úhelník. In: *Ynářadí.cz* [online]. 2018 10. června 2019 19:00:27 [cit. 2019-06-10]. Dostupné z: https://www.ynaradi.cz/uhelnik-kinex-presny-prilozny-1000-660-trpr0-din

[40] Nožový úhelník. In: *Somet.cz* [online]. 2018, 25. 5. 2018 [cit. 2019-06-10]. Dostupné z: https://somet.cz/cz/uhelnik-nozovy-leskla-ocel-100x70-mm-trida-00

Pokud je potřeba zkontrolovat jiný úhel než pravý, používají se speciální úhelníky, např. úhelníky s úhlem o velikosti 45° nebo 135°.

Úhlové měrky

Používají se na přesné měření úhlů. Sadu úhlových měrek (Obr. 3. 4) tvoří kalené ocelové destičky, broušené a lapované, s dvěma nebo čtyřmi přesně vyrobenými úhly. Sada umožňuje vytvářet sestavením měrek jakýkoliv úhel. Sestavené měrky se upínají do držáku. Používají se 3 stupně přesnosti úhlových měrek, s maximální odchylkou ± 3, ± 10, ± 30 vteřin.

[41]

Obr. 3. 4 Úhlové měrky

Úhloměry

Úhloměry jsou nejčastěji používaným měřidlem. Pro měření úhlů se používají různé druhy úhloměrů, které obvykle umožňují měření úhlů v rozsahu 0° až 180°. V dílenských podmínkách se používají úhloměry obloukové a univerzální.

a) Obloukové dílenské úhloměry (Obr. 3. 5) mají rozlišitelnost obvykle 1° a mohou být použity jen pro méně přesná měření, např. při různých zámečnických pracích. Na stupnici v rozmezí 0° až 180° se vyměří požadovaný úhel. Ramínko pak tento úhel vytyčí. Úhloměr je možné využít i opačným způsobem. Ramínko se přiloží na rameno měřeného úhlu. Ukazatel na stupnici tento úhel změří. Úhloměr obsahuje také aretační šroub, takže je možné velikost úhlu pevně zachytit. Pro přesnější měření je možné použít úhloměr digitální (Obr. 3. 6)

[42]

Obr. 3. 5 Obloukový úhloměr

[43]

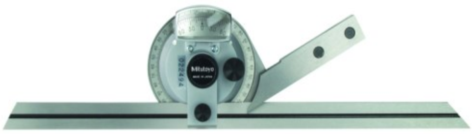
Obr. 3. 6 Obloukový úhloměr digitální

[41] Úhlové měrky. In: *Somet.cz* [online]. 2018, 25. 5. 2018 [cit. 2019-06-10]. Dostupné z: https://somet.cz/cz/sada-uhlovych-merek-14-30

[42] Obloukový úhloměr. In: *Nako.cz* [online]. 2019 [cit. 2019-06-10]. Dostupné z: https://www.nako.cz/14293-kinex-251613-uhlomer-250x400mm-nerez-1089-07-250.html#!prettyPhoto

[43] Obloukový úhloměr digitální. In: *Somet.cz* [online]. 2018, 25. 5. 2018 [cit. 2019-06-10]. Dostupné z: https://somet.cz/cz/obloukovy-uhlomer-digitalni-0-180120x150-mm

b) Univerzální úhloměry se uplatňují pro přesnější měření úhlů. Má dvě navzájem kolmá ramena a jedno vyměnitelné pravítko. Celé stupně odečítáme na stupnici, která je rozdělena na čtyři kvadranty po 2° a hodnotu úhlu určuje nulová čárka. Minuty odečítáme od nuly v tom samém směru. Přesnost odečítání je 5 minut. Také se používají optické úhloměry s odečítáním pomocí lupy (Obr. 3. 7). Pro ještě přesnější měření se používají úhloměry digitální (Obr. 3. 8)


[44]

Obr. 3. 7 Universální úhloměr s lupou


[45]

Obr. 3.8 Universální úhloměr digitální

c) Optické dělicí hlavy se používají pro měření a přesnou výrobu, kde je požadováno přesné dělení a odečítání úhlu. [46]

3. 2. Nepřímé měření úhlů

Nepřímá měření úhlů jsou metody založené na trigonometrických funkcích. Lze jimi měřit úkosy, kužele, sklony apod.

<u>Sinusové pravítko</u>

Sinusové pravítko (Obr. 3. 9) je přesně broušená destička, na jejíž obou stranách jsou umístěny válečky stejného průměru (100, 200, 300, 400 mm).


[47]

Obr. 3. 9 Sinusové pravítko

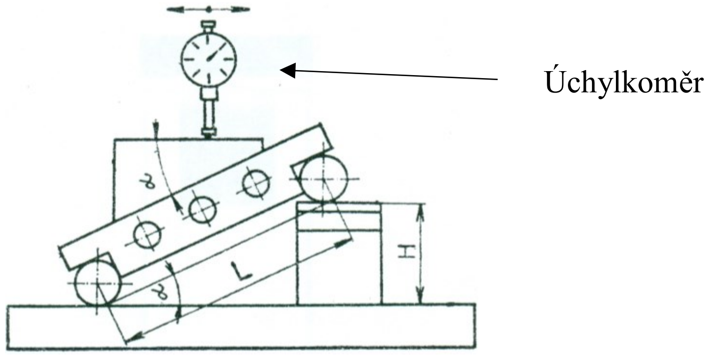
[44] Univerzální úhloměr s lupou. In: *Mitutoyo.eu* [online]. 2019 [cit. 2019-06-10]. Dostupné z: https://shop.mitutoyo.eu/web/mitutoyo/cs/mitutoyo/01.05.05/Univerz%C3%A1ln%C3%AD%20%C3%BAhlom%C4%9Br/$catalogue/mitutoyoData/PR/187-908/index.xhtml

[45] Univerzální úhloměr digitální. In: *Mitutoyo.eu* [online]. 2019 [cit. 2019-06-10]. Dostupné z: https://shop.mitutoyo.cz/web/mitutoyo/cs_CZ/mitutoyo/01.05.051/Univerz%C3%A1ln%C3%AD%20%C3%BAhlom%C4%9Br%20DIGIMATIC/$catalogue/mitutoyoData/PR/187-502/index.xhtml;jsessionid=080603192F6849D759B578F7F431A5ED

[46] Měření úhlů. *Měření úhlů* [online]. Ivančice: MaB Calibr, spol., 2014, 2014 [cit. 2018-11-27]. Dostupné z: http://www.mbcalibr.cz/mereni-uhlu.html

[47] Sinusové pravítko. In: *Amazon.de* [online]. 1998 [vid. 2019-06-10]. Dostupné z: https://www.amazon.de/Helios-Preisser-Sinuslineal-Anschlag-100mm-0513001/dp/B00RBL7XK6

Postup měření je znázorněn na (Obr. 3. 10). Pravítko se položíválečky na rovnou desku. Jeden váleček se podkládá měrkami o výšce H. Úchylkoměrem se pak přejíždí po horní ploše měřené součásti, která je položena na pravítku. Pokud je úhel správně nastaven, úchylkoměr neukáže žádnou odchylku. [48]



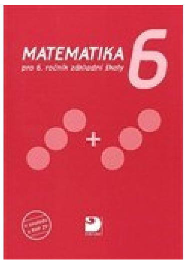
[49]

Obr. 3. 10 Měření sinusovým pravítkem

Hodnota měřeného úhlu se zjistí pomocí výpočtu ze vztahu: $H = L * \sin\alpha$, kde H je výška měrky, L je délka sinusového pravítka (vzdálenost středů podstav válečků), α měřený úhel.

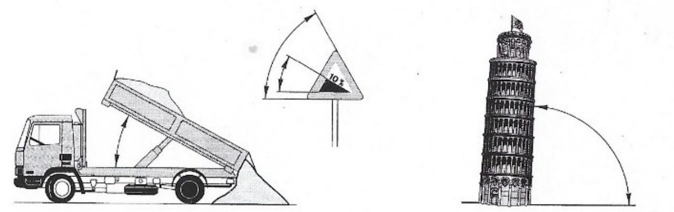
4. Zavedení úhlů ve škole

4. 1. MATEMATIKA pro 6. ročník Základní školy, Nakladatelství Fortuna 2007



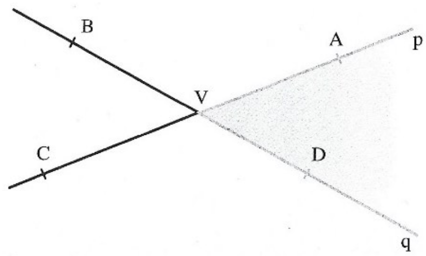
[48] ŠIMÁČEK, Jiří. Elektronická učebnice: Strojírenství. *Elektronická učebnice: Strojírenství* [online]. Olomouc: MSMT-7521/2015-40, 2015, 28.8.2015 [cit. 2019-06-15]. Dostupné z: https://eluc.kr-olomoucky.cz/verejne/lekce/1088

[49] Měření sinusovým pravítkem. In: *Eluc.kr* [online]. 1989 [cit. 2019-06-11]. Dostupné z: https://eluc.kr-olomoucky.cz/verejne/lekce/1088



3.1 Úhel jako část roviny

Narýsujte do sešitu dvě přímky p, q, které jsou a) různoběžné, b) rovnoběžné c) splývající. Na kolik částí rozdělí celou rovinu příslušná dvojice přímek?



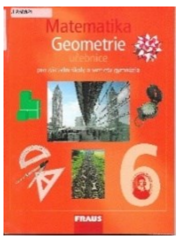
Různoběžky dělí rovinu na čtyři části. Každou z nich budeme nazývat **úhel**.
Úhel ovšem není jen to, co máme narýsováno v sešitu nebo v učebnici. Úhel je stejně jako přímka nebo polopřímka nekonečný útvar. Představujeme si, že se stále rozevírá, aniž by někde končil.

Polopřímky *VA* a *VB*, které úhel vymezují, nazýváme **ramena úhlu**. Bodu *V* budeme říkat **vrchol úhlu**. Úhel se označuje pomocí vrcholu a dvou bodů na ramenech. Náš úhel můžeme popsat jako **úhel** *AVB*, používáme symbol ∡.

∡ *AVB*

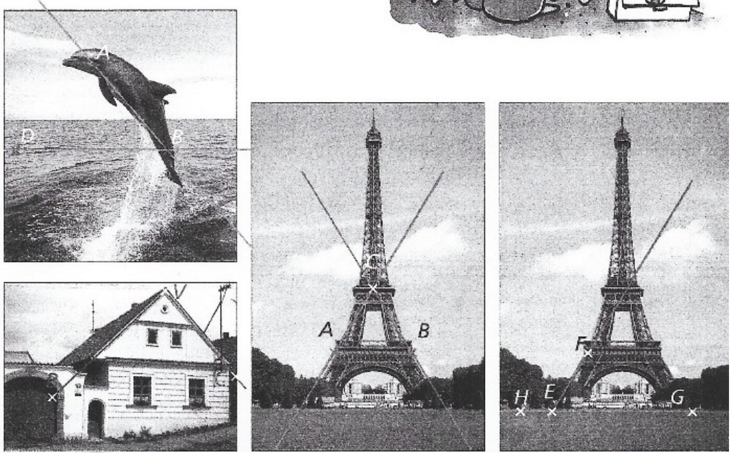
K označení úhlu potřebujeme tři body. Všimněte si, že název vrcholu je vždy uprostřed. Pořadí krajních bodů není rozhodující. [50]

4. 2. Matematika, Geometrie, učebnice pro Základní školy a víceletá Gymnázia, Fraus



[50] COUFALOVÁ, Jana. *Matematika pro 6. ročník základní školy*. 2., upr. vyd. Praha: Fortuna, 2007. ISBN 978-80-7168-992-8, str. 87-88.

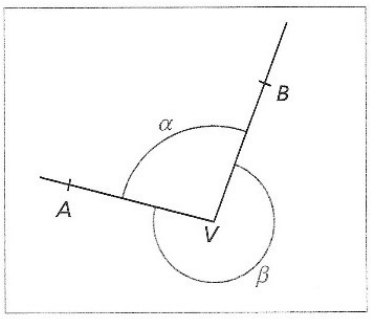
Pozorujte obrázky. Které body jsou důležité, abychom mohli určit sklon střechy domu?
Jaký je sklon pilířů Eiffelovy věže?
Je sklon, který stavitelé naměřili a označili písmeny *HEF*, stejný jako *FEG*?
Je důležitý sklon, pod nímž delfín vyskočí nad vodu?



Část roviny označená obloukem se nazývá úhel. Úhel *AVB* je ohraničen polopřímkami *VA* a *VB*. Bod *V* je vrchol úhlu a polopřímky *VA* a *VB* jsou ramena úhlu. Ramena považujeme za součást úhlu.

Úhly se obvykle označují písmeny řecké abecedy α, β, γ, δ, ε…

Úhel *AVB* značíme $\sphericalangle AVB$ (vrchol píšeme vždy doprostřed). Všimněte si, že na obrázku určuje vrchol *V* a ramena *VA* a *VB* dva úhly – α a β.



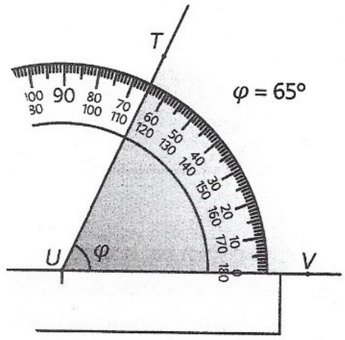
[51]

4. 3. HEJNÉHO METODA B

[51] BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 6 pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2007. ISBN 978-80-7238-656-7, str.19-20.

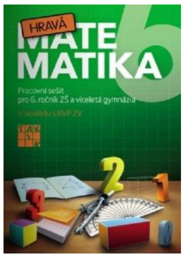
Na obrázku je úhel φ (čteme *fí*). Je to část roviny ohraničená polopřímkami *UT* a *UV*, **rameny** úhlu φ. Ramena *UT* a *UV* svírají úhel φ.
Bod *U* je **vrchol** úhlu φ.
Značíme $\varphi = \sphericalangle TUV$ nebo $\sphericalangle VUT$. Úhel φ je **ostrý**, protože jeho velikost je méně než 90°.
Úhel, jehož velikost je 90°, se nazývá **pravý**.

Měření úhlů zavedli astronomové v Mezopotámii před více než pěti tisíci lety.
Za základ vzali **plný úhel** („jednu otočku“) a rozdělili jej na 360 stupňů.



[52]

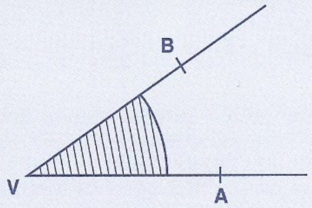
4. 4. HRAVÁ MATEMATIKA, Pracovní sešit pro 6. ročník ZŠ a víceletá Gymnázia



[52] HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Darina JIROTKOVÁ, Jana HANUŠOVÁ, Anna SUKNIAK, Eva BOMEROVÁ a Kateřina EICHLEROVÁ. *Matematika*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2015. ISBN 978-80-905756-1-5, str.5.

ÚHEL

Úhel nebo rovinný úhel je část roviny určená dvěma polopřímkami se společným počátkem



Pojmenování
– ramena úhlu jsou polopřímky, které určují úhel v rovině (polopřímka VA, polopřímka VB)
– vrchol úhlu je společný bod ramen (bod V)

Znázornění úhlu
– úhel se znázorňuje pomocí ramen, mezi kterými se vyznačí obloučkem u vrcholu úhlu

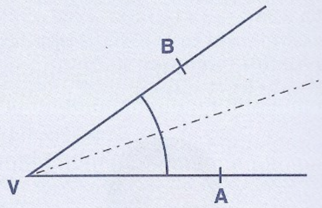
Značka úhlu
– úhel se označuje symbolem ∢

Velikost úhlu
– měříme pomocí úhloměru ve stupních, minutách a vteřinách
1 stupeň … 1° 1 minuta … 1′ 1 vteřina … 1″

Převody
1° = 60′ = 3600″
1′ = 60″

25°16′ = 1516′ 25 • 60′ + 16′ = 1500′ + 16′
1984′ = 33°4′ 1984 : 60 = 33° zbytek 4′

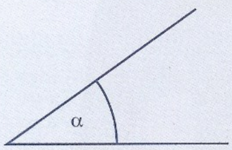
Osa úhlu
– polopřímka, která rozděluje úhel na dvě stejně velké části
– počáteční bod polopřímky je vrchol úhlu

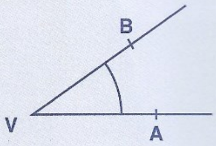


Označení úhlů

1. způsob:
– pomocí písmen řecké abecedy (α, β, γ)

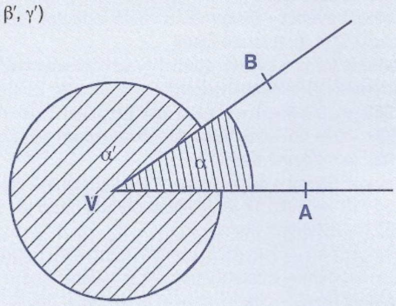
2. způsob:
– pomocí tří bodů (∢ AVB)





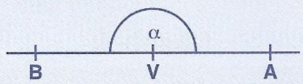
Rozdělení úhlu
• vnitřní úhel – množina bodů ohraničená rameny úhlu
• vnější úhel – množina bodů roviny, které nejsou body vnitřního úhlu

Zápis vnitřních a vnějších úhlů
– vnitřní úhel zapisujeme pomocí písmen řecké abecedy (α, β, γ)
– vnější úhel se označuje znakem vnitřního úhlu s čárkou (α′, β′, γ′)

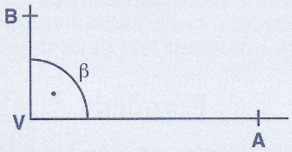


Druhy úhlů, rozdělení úhlů podle velikosti

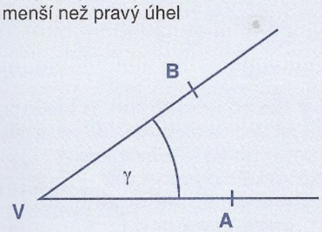
a) Přímý úhel (α = 180°)
– úhel, jehož ramena jsou navzájem opačné polopřímky, takže spolu vytvářejí přímku
– polovina roviny



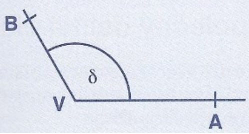
b) Pravý úhel (β = 90°)
– úhel, který svírají dvě kolmice
– polovina přímého úhlu
– označujeme ho tečkou v obloučku



c) Ostrý úhel (0° < γ < 90°)
– úhel menší než pravý úhel



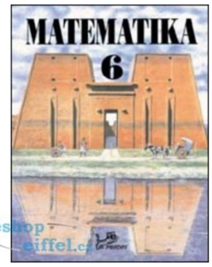
d) Tupý úhel (90° < δ < 180°)
– úhel větší než pravý úhel a menší než přímý úhel

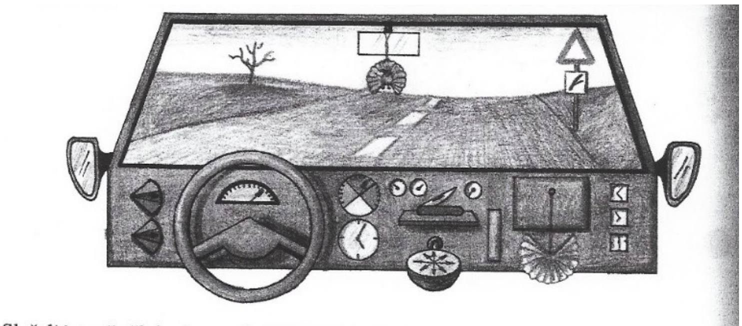


[53]

53 HERMOCHOVÁ, Dana, Jana PRESOVÁ, Petr KAŠŠÁK, et al. *Hravá matematika 6: pracovní sešit pro 6. ročník ZŠ a víceletá gymnázia: v souladu s RVP ZV*. Praha: Taktik, 2014. ISBN 978-80-87881-18-7, str. 4.

4. 5. MATEMATIKA 6, Prodos




Slyšeli jste už někdy slovo „úhel“? Při jaké příležitosti?

Polopřímky *VA* a *VB* se společným počátkem (viz obr.) určují v rovině dvě části. Každá z těchto částí se nazývá **úhel**.

A *V* *B* ∢*AVB* ∢*AVB*

V - vrchol úhlu

↦*VA*, ↦*VB* - ramena úhlu (patří oběma úhlům)

∢*AVB*, ∢*AVB* - úhel *AVB* (s vrcholem *V*)

[54]

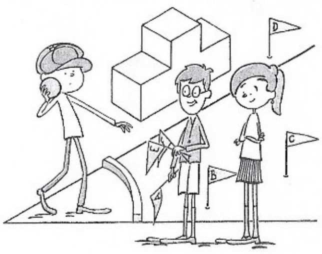
4. 6. MATEMATIKA pro 6. ročník Základní školy [3], Prometheus

[54] MOLNÁR, Josef. *Matematika 6: [učebnice pro základní školy]*. Olomouc: Prodos, 1998. ISBN 80-85806-98-3, str.58.

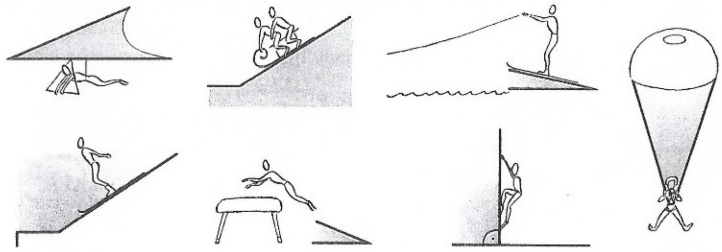
A *Pepa vrhá koulí.* Čenda označuje místa dopadu koule trojúhelníkovými praporky. Anička je zvědavá: „Dopadne tentokrát koule do vymezeného úhlu?“

a) Kterými písmeny jsou označeny dopady koule do úhlu?

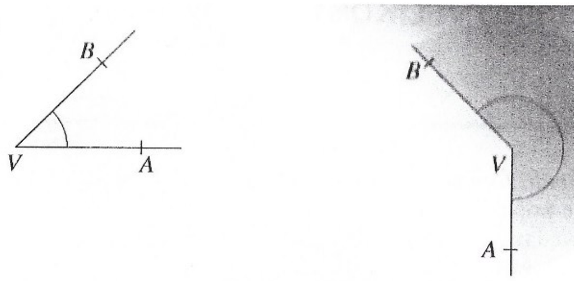
b) Které písmeno označuje dopad koule mimo úhel?



B *Úhly a sportovní disciplíny.* Poznáš, o které sporty jde?



ÚHEL



Bod V je *vrchol* úhlu AVB.

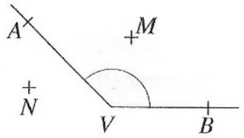
Polopřímky VA a VB jsou *ramena* úhlu.

Úhel na obrázku, který má vrchol V a ramena VA, VB, označujeme takto:

∡AVB nebo ∡BVA ∢AVB nebo ∢BVA

Písmeno označující vrchol je vždy *uprostřed.*

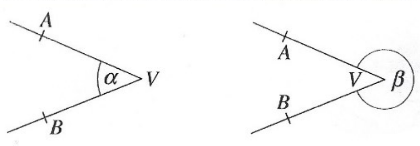
Úhel je část roviny.



Body M, A, B, V *patří* úhlu AVB.

Bod N *nepatří* úhlu AVB.

$M \in$ ∡AVB $N \notin$ ∡AVB



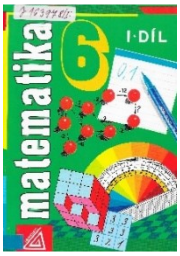
$\alpha =$ ∡AVB $\beta =$ ∢AVB

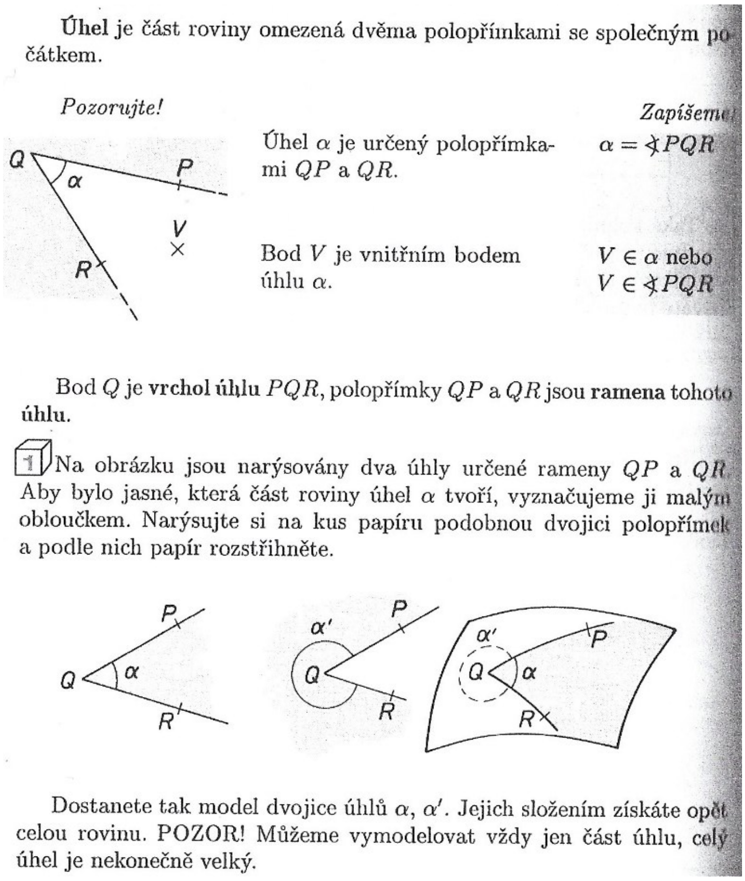
Úhly často označujeme písmeny řecké abecedy. [55]

---

[55] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 6. ročník základní školy: [učebnice zpracovaná podle učebních osnov vzdělávacího programu Základní škola*. Praha: Prometheus, 1997. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-092-6, str 3-5.

4. 7. Matematika 6, I. DÍL, Prometheus





Úhel je část roviny omezená dvěma polopřímkami se společným počátkem.

Pozorujte! | *Zapíšeme:*

Úhel α je určený polopřímkami QP a QR. $\alpha = \sphericalangle PQR$

Bod V je vnitřním bodem úhlu α. $V \in \alpha$ nebo $V \in \sphericalangle PQR$

Bod Q je **vrchol úhlu** PQR, polopřímky QP a QR jsou **ramena tohoto úhlu.**

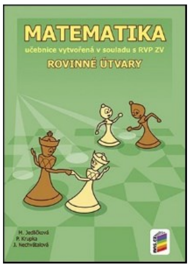
1 Na obrázku jsou narýsovány dva úhly určené rameny QP a QR. Aby bylo jasné, která část roviny úhel α tvoří, vyznačujeme ji malým obloučkem. Narýsujte si na kus papíru podobnou dvojici polopřímek a podle nich papír rozstřihněte.

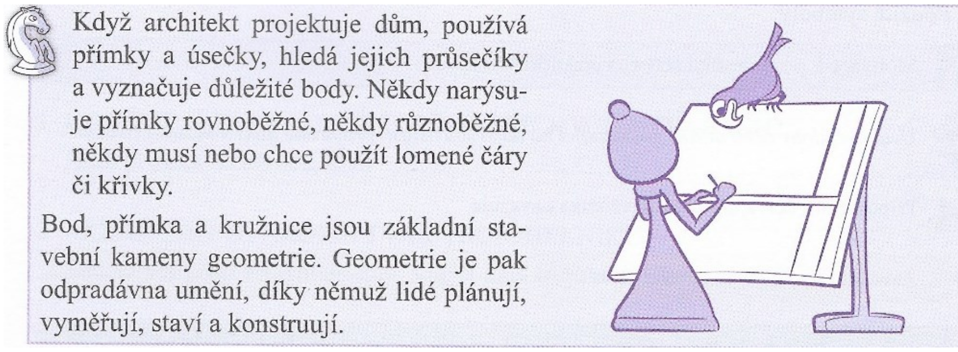
Dostanete tak model dvojice úhlů α, α'. Jejich složením získáte opět celou rovinu. POZOR! Můžeme vymodelovat vždy jen část úhlu, celý úhel je nekonečně velký.

[56]

[56] ŠAROUNOVÁ, Alena, Jan MAREŠ, Jitka RŮŽIČKOVÁ a Věnceslava VÄTEROVÁ. *Matematika 6*. 2. vydání. Ilustroval Martin MAŠEK. Praha: Prometheus, 2015. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-373-8, str.94.

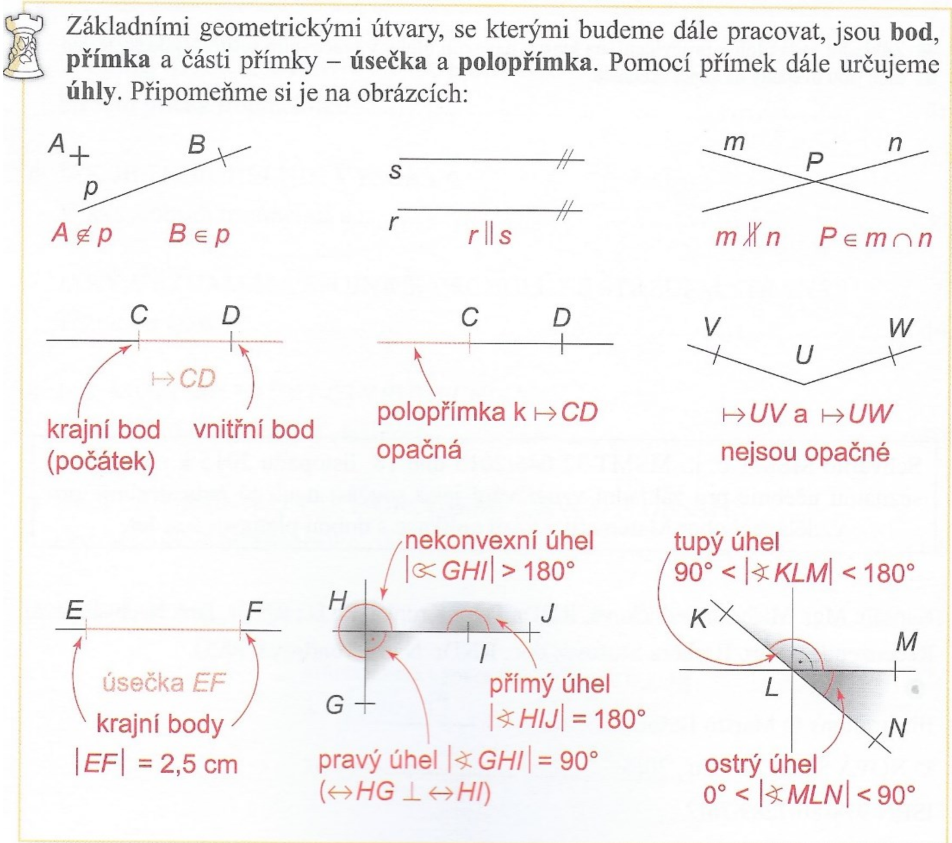
4. 8. MATEMATIKA učebnice vytvořená v souladu s RVP ZV ROVINNÉ ÚTVARY, Nová škola, s. r. o. 2015





Když architekt projektuje dům, používá přímky a úsečky, hledá jejich průsečíky a vyznačuje důležité body. Někdy narýsuje přímky rovnoběžné, někdy různoběžné, někdy musí nebo chce použít lomené čáry či křivky.

Bod, přímka a kružnice jsou základní stavební kameny geometrie. Geometrie je pak odpradávna umění, díky němuž lidé plánují, vyměřují, staví a konstruují.

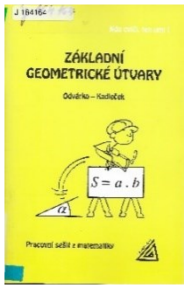


Základními geometrickými útvary, se kterými budeme dále pracovat, jsou **bod**, **přímka** a části přímky – **úsečka** a **polopřímka**. Pomocí přímek dále určujeme **úhly**. Připomeňme si je na obrázcích:

[57]

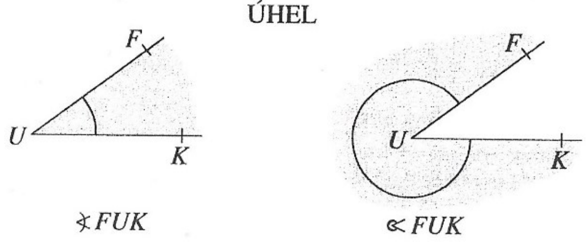
[57] JEDLIČKOVÁ, Michaela, Peter KRUPKA a Jana NECHVÁTALOVÁ. *Matematika: rovinné útvary*. Ilustroval Martin BAŠAR. Brno: Nová škola, 2015. Duhová řada. ISBN 978-80-7289-7612, str. 2.

4. 9. ZÁKLADNÍ GEOMETRICKÉ ÚTVARY, Prometheus



Co je úhel

ÚHEL



Písmeno U označuje **vrchol** úhlu.

Polopřímky UK a UF jsou **ramena** úhlu.

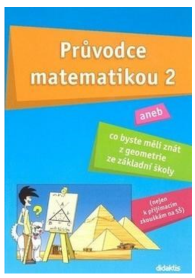
Úhel je část roviny.

Úhly často značíme řeckými písmeny:

α – alfa	β – béta
γ – gamma	δ – delta
ε – epsílon	φ – fí

[58]

4. 10. Průvodce matematikou 2, didaktis

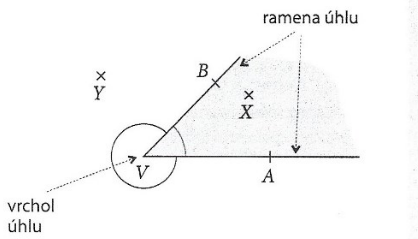


[58] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Základní geometrické útvary: pracovní sešit z matematiky: [pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií]*. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-018-7, str.28-29.

Úhel

ÚHEL je část roviny ohraničená dvěma polopřímkami se společným počátkem. Polopřímky nazýváme RAMENA ÚHLU a počátek polopřímek VRCHOL ÚHLU.

Dvě polopřímky se společným počátkem rozdělují rovinu na dva úhly. Graficky tyto úhly odlišujeme oblouky kružnic, jejichž středy se nacházejí ve vrcholu úhlu. Tyto dva úhly můžeme rozlišit i popisem pomocí libovolného vnitřního bodu (úhel s vnitřním bodem *X*).



Úhly označujeme:	Zapisujeme:	Čteme:
malými písmeny řecké abecedy,	α, β, ...	úhel *alfa*, úhel *beta*, ...
pomocí trojice bodů v pořadí: libovolný vnitřní bod jednoho ramene, vrchol úhlu, libovolný bod druhého ramene a pomocí symbolů ∢ nebo ⦠.	∢ AVB ⦠ AVB	úhel AVB úhel AVB

Druhé písmeno v pořadí označuje vrchol úhlu.

[59]

Zhodnocení

Pro zhodnocení zmíněných učebnic jsem si stanovila několik kritérií:

1) Ve kterých učebnicích je na úvod zařazena motivace?

2) Je v učebnicích úhel zaveden pomocí dvou různoběžných přímek nebo dvou polopřímek se společným počátkem?

3) Ve kterých učebnicích jsou polopřímky VA, VB nazvány rameny úhlu, společný počátek polopřímek vrchol úhlu?

4) Jakým způsobem je úhel značen? Pomocí třech písmen, jednoho písmene řecké abecedy nebo oběma způsoby? Je úhel označen obloučkem?

5) Ve kterých učebnicích je zmíněno, že je úhel částí roviny? Která učebnice připojuje informaci o tom, že je úhel nekonečný?

6) Které učebnice uvádějí jednotky velikosti úhlů a způsob měření?

7) Ve kterých učebnicích najdeme další informace o vlastnostech úhlů?

Pro zjednodušení budou dále učebnice označeny čísly tak, jak jsou již uvedeny, tzn. např. Učebnice od nakladatelství Fortuna má číslo 1, Průvodce matematikou číslo 10.

[59] PALKOVÁ, Martina. *Průvodce matematikou 2, aneb, Co byste měli znát z geometrie ze základní školy*. Brno: Didaktis, 2007. Co byste měli znát ze základní školy. ISBN 978-80-7358-083-4, str. 13.

1) Obrázek – 1, 2, 6

Otázka – 2, 5

Historická poznámka – 3

2) Různoběžky – 1

Polopřímky se společným počátkem – 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10

3) Ramena + vrchol – 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10

4) 3 písmena – 1, 5, 8

Oba způsoby – 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10

Oblouček – 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

5) Nekonečnost – 1, 7

Část roviny – 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10

6) Jednotky – 3, 4, 8

Postup měření – 3

7) Další vlastnosti – 3, 4, 8

Shrnutí:

Motivace je dána obrázkem v učebnicích 1, 2, 6, otázkou navozující diskuzi o daném tématu ve 2, 5 a historickou poznámkou ve 3.

Ve všech učebnicích, kromě jedné, je úhel zaveden pomocí dvou polopřímek se společným počátkem. Jedinou výjimkou je učebnice 1, kde je zaveden pomocí dvou různoběžných přímek.

Polopřímky VA, VB jsou nazvány rameny úhlu a společný počátek polopřímek vrcholem ve všech učebnicích, kromě 8, která se o tomto označení vůbec nezmiňuje.

Učebnice 1, 5, 8 zavádí značení úhlu pomocí třech písmen, učebnice 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10 značí úhly oběma způsoby, tzn. pomocí třech písmen i jedním písmenem řecké abecedy. V žádné učebnici se neobjevuje značení pouze písmenem řecké abecedy. Označení úhlu obloučkem zavádí 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

V učebnicích 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10 je uvedeno, že úhel je částí roviny, v 1, 7 pak navíc, že je úhel nekonečný.

Stupeň jako jednotku velikosti úhlu zavádějí 3, 4, 8. Postup měření pouze 3. Ostatní učebnice jednotky velikosti vůbec nezmiňují.

Další vlastnosti úhlů jsou uvedeny hned v úvodu v učebnicích 3, 4, 8. Všechny učebnice ale poskytují celou řadu vlastností v dalších částech učebnice.

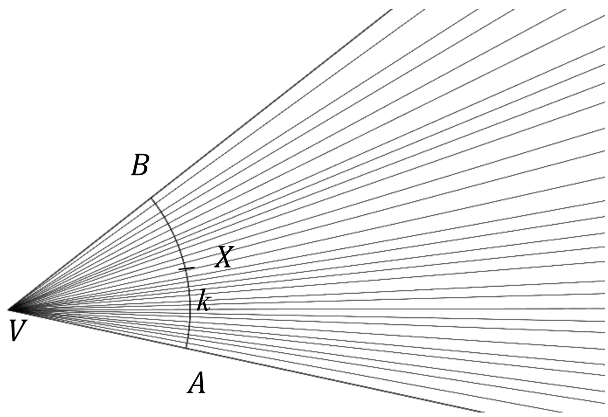
V žádné učebnici nejsou splněna všechna kritéria. Záleží tedy na každém vyučujícím, která kritéria upřednostňuje a podle toho zvolí příslušnou učebnici.

Ve všech zmíněných učebnicích je úhel definován jako část roviny, která je vymezena dvěma polopřímkami se společným počátkem. Tento společný bod je nazýván vrcholem úhlu. Označen je obvykle V. Polopřímky určující úhel (VA, VB) jsou nazývány rameny úhlu. Úhel je znázorněn obloučkem mezi zmíněnými polopřímkami, v zápise třemi velkými písmeny; vrchol je vždy prostředním z nich, např. $\sphericalangle AVB$ (V je vrchol úhlu).

Přesněji je možné tuto definici formulovat takto: Libovolné dvě různé polopřímky (mohou být i opačné) se společným počátkem rozdělí rovinu, v níž leží, na dvě části. Každá z těchto částí, včetně obou polopřímek VA, VB se nazývá úhel AVB. [60]

Z této definice budeme vycházet v dalším textu.

Někdy se můžeme setkat i s následující definicí: Rovinným úhlem nazýváme množinu všech polopřímek VX se společným počátkem V, kde bod X patří do daného oblouku AB kružnice k se středem v bodě V. (Obr. 4.1) [61]



Obr. 4. 1 Úhel jako množina polopřímek

Polopřímek VX je nekonečně mnoho. Nelze je proto sestrojit všechny.

5. Vlastnosti úhlů

Co je to úhel, už zde bylo zmíněno několikrát. Pro úplnost je ještě potřeba připomenout, že součástí úhlu jsou i jeho ramena a že úhel je nekonečný (ne jeho velikost) stejně jako polopřímky, které ho vymezují.

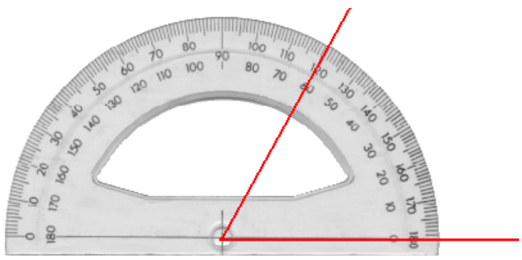
[60] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 9., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN isbn:978-80-7196-356-1, str.418.

[61] PROCHÁZKA, Josef. Výuka geometrie 1.0: Úhly. *Výuka geometrie 1.0: Úhly* [online]. Praha: Pedagogická fakulta UK [cit. 2019-06-21]. Dostupné z: http://it.pedf.cuni.cz/~proch/program/uhel.htm

5. 1. Měření úhlů ve škole

Vlastnosti úhlů jsou velmi úzce spjaty s jejich velikostmi. Považuji proto za důležité uvést, jakým způsobem se ve školách velikosti úhlů měří.

Úhloměr přiložíme značkou na středu úhloměru na vrchol měřeného úhlu. Úhloměr srovnáme tak, aby přímka, která na úhloměru spojuje 0° a 180° přesně zakrývala jedno rameno úhlu (úhel, který chceme změřit, leží pod úhloměrem). Druhé rameno úhlu nám ukazuje na úhloměru příslušnou velikost úhlu-na stupnici, která začíná nulou u prvního ramene.
(Obr. 4. 2)



[62]

Obr. 4. 2 Měření úhlu úhloměrem

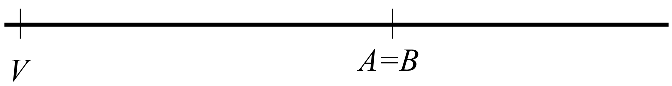
Na obrázku je znázorněn úhel o velikosti 60°.

Nyní se podívejme na další vlastnosti úhlů.

5. 2. Druhy úhlů podle velikosti

Nulový úhel-ramena úhlu tvoří dvě shodné polopřímky se společným počátkem (ramena leží na sobě) - nemá žádný vnitřní bod (Obr. 5. 1)

$$\alpha = 0° = 0\pi$$

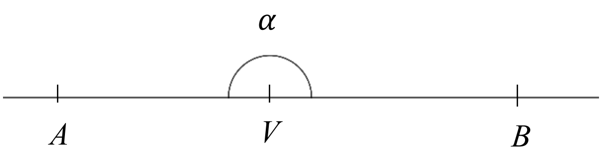


Obr. 5. 1 Nulový úhel

Přímý úhel-ramena úhlu tvoří dvě navzájem opačné polopřímky se společným počátkem (Obr. 5. 2)

[62] Měření úhlu úhloměrem. In: *m. matikaj.webnode.cz* [online]. 2013, 19. 11. 2013 [cit. 2019-06-21]. Dostupné z: http://m.matikaj.webnode.cz/news/velikost-uhlu/

$$\alpha = 180° = \pi$$



Obr. 5. 2 Přímý úhel

<u>Plný úhel</u>-ramena úhlu tvoří dvě shodné polopřímky se společným počátkem (ramena leží na sobě) - vnitřními body jsou všechny body roviny (Obr. 5. 3)

$$\alpha = 360° = 2\pi$$

Obr. 5. 3 Plný úhel

<u>Pravý úhel</u>-ramena úhlu tvoří dvě kolmé polopřímky se společným počátkem (Obr. 5. 4)

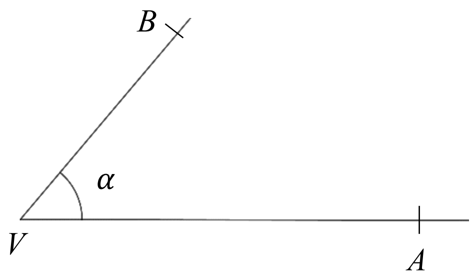
$$\alpha = 90° = \frac{\pi}{2}$$

Obr. 5. 4 Pravý úhel

<u>Ostrý úhel</u>-úhel větší než nulový a menší než pravý. (Obr. 5. 5)

$$0° < \alpha < 90°$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

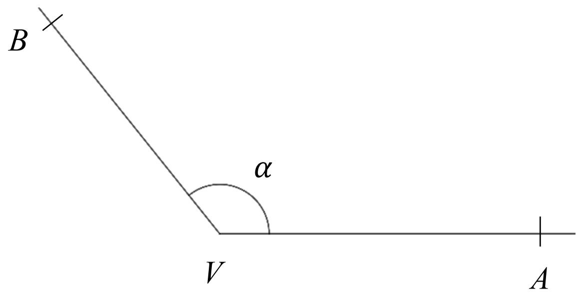


Obr. 5. 5 Ostrý úhel

Tupý úhel-úhel větší než pravý a menší než přímý. (Obr. 5. 6)

$$90° < \alpha < 180°$$

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$



Obr. 5. 6 Tupý úhel

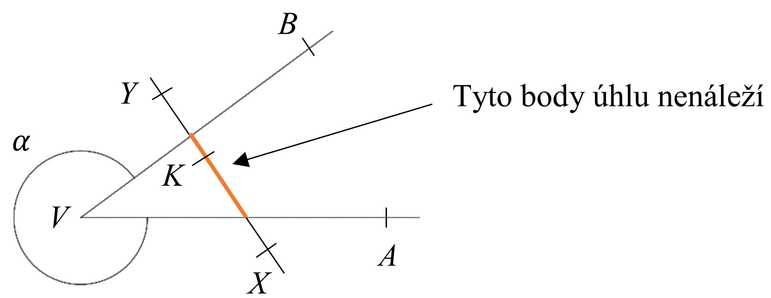
Všechny právě jmenované úhly se nazývají konvexní.

Kosý úhel

Kosým úhlem je každý úhel, který není nulový ($\alpha \neq 0°$), pravý ($\alpha \neq 90°$), přímý ($\alpha \neq 180°$) ani plný ($\alpha \neq 360$)

Nekonvexními úhly pak nazýváme takové úhly, které jsou větší než přímý úhel a menší než plný úhel.

V nekonvexním úhlu lze najít dva body takové, že úsečka s těmito krajními body, má alespoň jeden vnitřní bod, který tomuto úhlu nenáleží. (Obr. 5. 7)



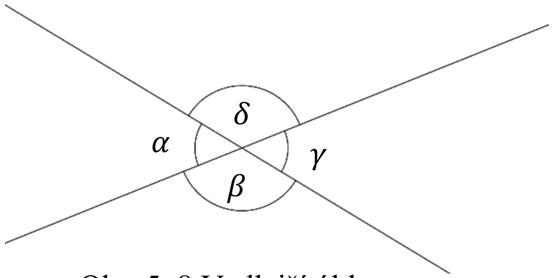
Obr. 5. 7 Nekonvexní úhel

Krajní body úsečky $X, Y \in \alpha$, $K \notin \alpha$.

5. 3. Dvojice úhlů

Vedlejší úhly

Dvojice úhlů, které mají jedno rameno společné a zbylá dvě ramena tvoří navzájem opačné polopřímky se společným počátkem V. (Obr. 5. 8)



Obr. 5. 8 Vedlejší úhly

Součet dvou vedlejších úhlů je vždy 180°, jejich součtem je přímý úhel.

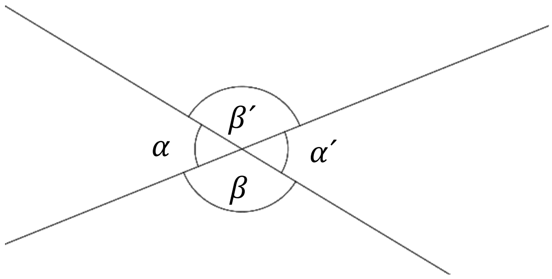
Dvojice vedlejších úhlů: α, β β, γ γ, δ δ, α

$$\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \delta = \delta + \alpha = 180°$$

Vrcholové úhly

Dvojice úhlů, jejichž rameny jsou navzájem opačné polopřímky se společným počátkem V. (Obr. 5. 9)

Vrcholové úhly jsou shodné.



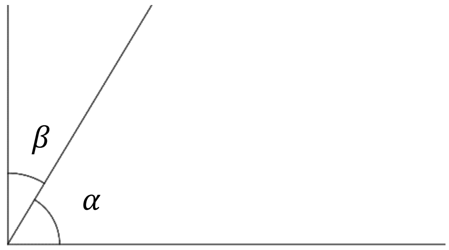
Obr. 5. 9 Vrcholové úhly

Dvojice vrcholových úhlů: α, α' β, β'

$$\alpha = \alpha' \quad \beta = \beta'$$

Doplňkové úhly

Dvojice úhlů, která má společné rameno a jejich součet je 90°. (Obr. 5. 10)

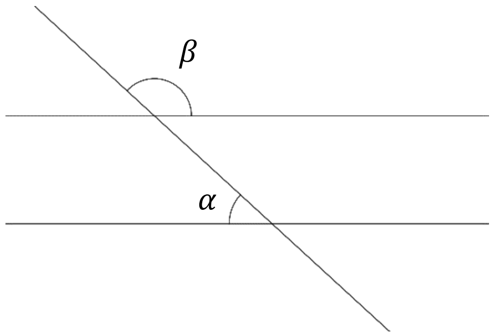


Obr. 5. 10 Doplňkové úhly

$$\alpha + \beta = 90°$$

Výplňkové úhly

Výplňkovými úhly je libovolná dvojice úhlů, jejichž součet je 180°. (Obr. 5. 11)



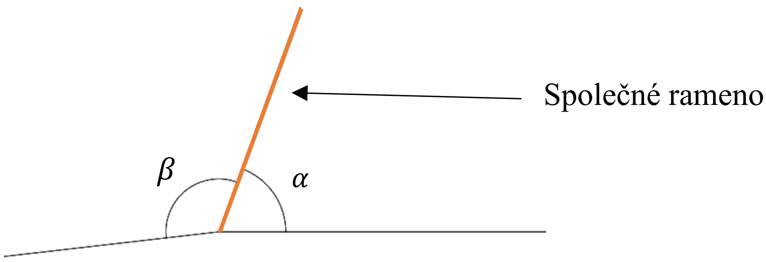
[63]

Obr. 5. 11 Výplňkové úhly

$$\alpha + \beta = 180°$$

Styčné úhly

Styčnými úhly je dvojice úhlů, která má jedno rameno společné a současně je součet velikostí těchto úhlů menší než 360°. (Obr. 5. 12)



Obr. 5. 12 Styčné úhly [64]

$$\alpha + \beta < 360°$$

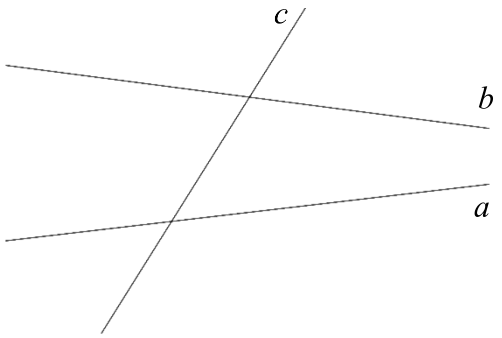
---

[63] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 9., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN isbn:978-80-7196-356-1, str. 421

[64] Dvojice úhlů. In: *Gymelg.cz* [online]. 2008, 17. 5. 2008 [cit. 2019-06-26]. Dostupné z: https://www.gymelg.cz/sites/default/files/matematika/Planimetrie1.pdf

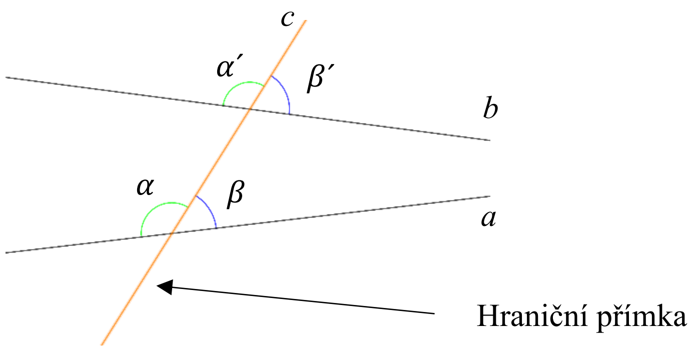
Souhlasné úhly

Souhlasnými úhly je dvojice úhlů, která vznikne, pokud dvě různoběžné přímky *a, b* protne další různoběžná přímka *c* (hraniční příčka). (Obr. 5. 13)



Obr. 5. 13 Poloha přímek v rovině

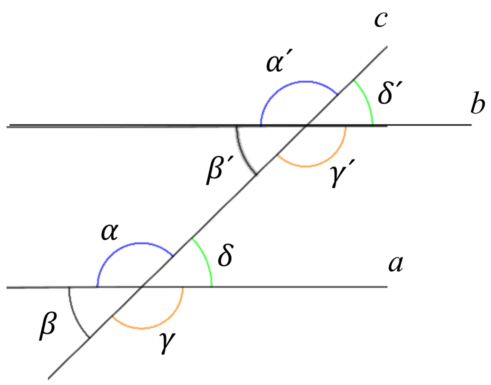
Souhlasné úhly leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou. (Obr. 5. 14) Jejich poloha znázorněna obrázkem (obloučkem).



Obr. 5. 14 Souhlasné úhly (s různoběžkami)

Dvojice souhlasných úhlů: α, α' $\quad \beta, \beta'$

Jsou-li přímky *a, b* rovnoběžné (a ∥ b), pak jsou souhlasné úhly shodné. (Obr. 5. 15)



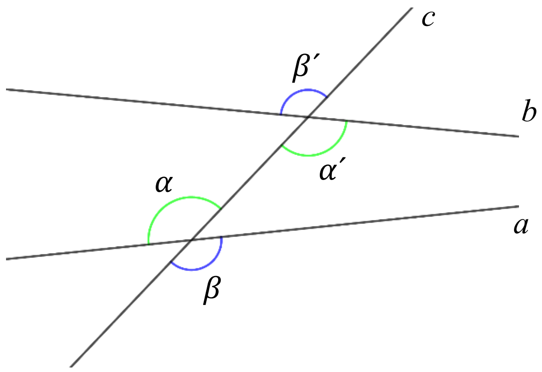
Obr. 5. 15 Souhlasné úhly (s rovnoběžkami)

$\alpha = \alpha' \quad \beta = \beta' \quad \gamma = \gamma' \quad \delta = \delta'$

Střídavé úhly

Stejně jako v případě souhlasných úhlů, střídavé úhly vzniknou protnutím dvou různoběžných přímek *a, b* další různoběžnou přímkou *c* (příčkou). (Obr. 5. 16)

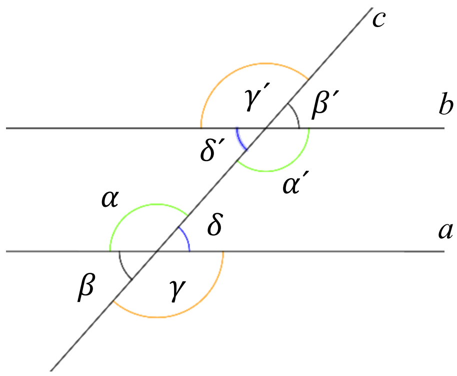
Střídavé úhly leží v polorovinách navzájem opačných s hraniční přímkou.



Obr. 5. 16 Střídavé úhly (s různoběžkami)

Dvojice střídavých úhlů: α, α' β, β'

Jsou-li přímky *a, b* rovnoběžné (*a* ∥ *b*), pak jsou střídavé úhly shodné. (Obr. 5. 17)



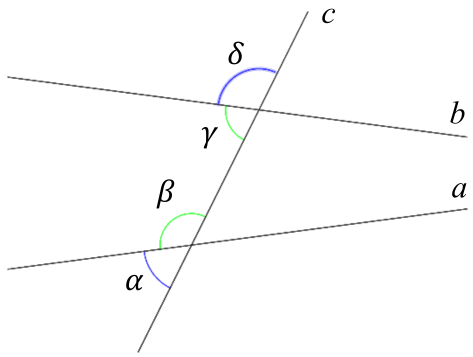
Obr. 5. 17 Souhlasné úhly (s rovnoběžkami)

$\alpha = \alpha'$ $\beta = \beta'$ $\gamma = \gamma'$ $\delta = \delta'$ [65]

[65] KRYNICKÝ, Martin. Matematika ZŠ: Souhlasné a střídavé úhly. *Realistické učebnice matematiky a fyziky: když (se) chcete naučit...* [online]. Strakonice, 2010, 27. 8. 2018 [cit. 2018-11-27]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/ucebnice/03%20Matematika%20Z%C5%A0/01%206.%20ro%C4%8Dn%C3%ADk/05%20%C3%9Ahel/14%20Souhlasn%C3%A9%20a%20st%C5%99%C3%ADdav%C3%A9%20%C3%BAhly.pdf

Přilehlé úhly

Stejně jako v případě souhlasných a střídavých úhlů vycházíme z dvojice různoběžných přímek *a, b* a třetí *c* (příčka), která je k oběma různoběžná. (Obr. 5. 18)

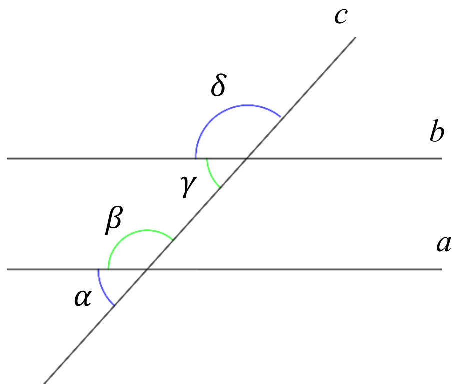


Obr. 5. 18 Přilehlé úhly (s různoběžkami)

Přilehlé úhly leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou *c*.

Dvojice přilehlých úhlů: $\alpha, \delta \quad \beta, \gamma$

Jsou-li přímky *a, b* rovnoběžné (*a* ∥ *b*), pak je součet dvojice přilehlých úhlů 180°. (Obr. 5. 19)



Obr. 5. 19 Přilehlé úhly (s různoběžkami)

[66]

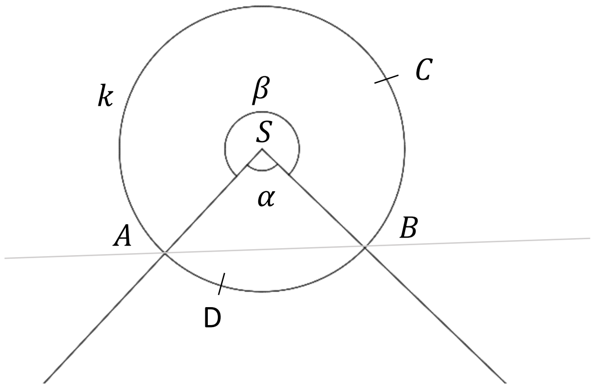
$$\alpha + \delta = 180° \quad \beta + \gamma = 180°$$

[66] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 9., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN isbn:978-80-7196-356-1, str. 423.

5. 4. Úhly příslušné k obvodu kružnice

<u>Středový úhel</u>

Je-li dána kružnice *k,* libovolná sečna rozdělí tuto kružnici průsečíky A, B na dvě části. Tyto části nazýváme oblouky kružnice k. Zvolíme body C, D tak, aby každý z těchto bodů ležel na jiném oblouku kružnice k. Body A, B tak dělí kružnici k na oblouky ADB a ACB. Každému z těchto oblouků odpovídá jeden středový úhel (oblouku ADB úhel α, oblouku ACB úhel β). Říkáme, že se jedná o středový úhel příslušný oblouku ADB (ACB). (Obr. 5. 20)

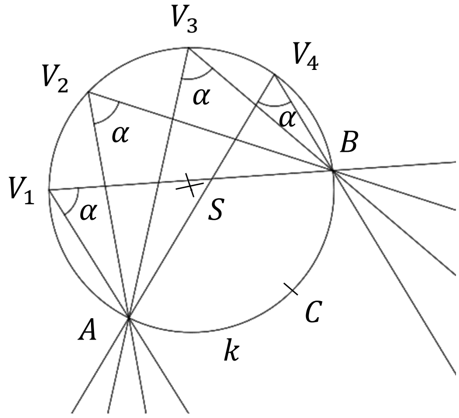


Obr. 5. 20 Středový úhel

Každému oblouku kružnice přísluší právě jeden středový úhel.

<u>Obvodový úhel</u>

Úhel AVB s vrcholem V (libovolný bod kružnice *k,* který nenáleží oblouku ACB) se nazývá obvodový úhel příslušný k oblouku *ACB*. (Obr. 5. 21) Na obrázku znázorněny čtyři obvodové úhly příslušné oblouku *ACB*.

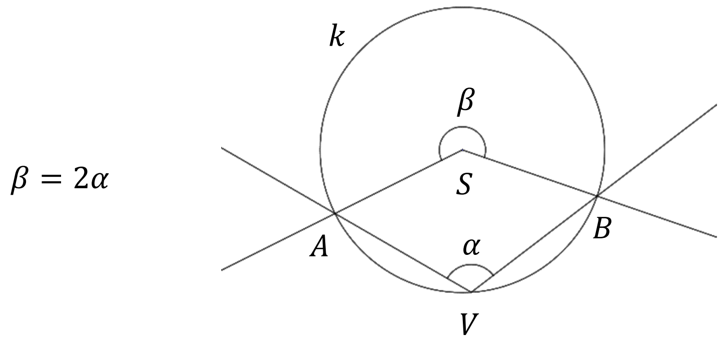


Obr. 5. 21 Obvodový úhel

Obvodových úhlů příslušných danému oblouku *ACB* existuje v kružnici nekonečně mnoho, protože druhý oblouk *AVB* obsahuje nekonečně mnoho bodů. Všechny tyto obvodové úhly mají stejnou velikost.

Věta o středovém a obvodovém úhlu

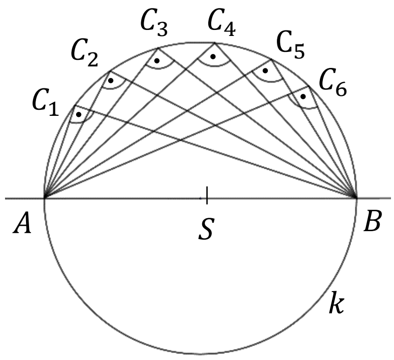
Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu příslušného témuž oblouku. (Obr. 5. 22). [67]



Obr. 5. 22 Středový a obvodový úhel

Thaletova věta

Všechny obvodové úhly sestrojené nad průměrem kružnice jsou pravé. (Obr. 5. 23)



Obr. 5. 23 Thaletova kružnice

$|\sphericalangle AC_1B| = |\sphericalangle AC_2B| = |\sphericalangle AC_3B| = |\sphericalangle AC_4B| = \ldots . = 90°$

Takových úhlů existuje nekonečně mnoho.

Kružnici *k*, na které leží body *A, B, C* (C_1, C_2, C_3, …) nazýváme Thaletovou kružnicí.

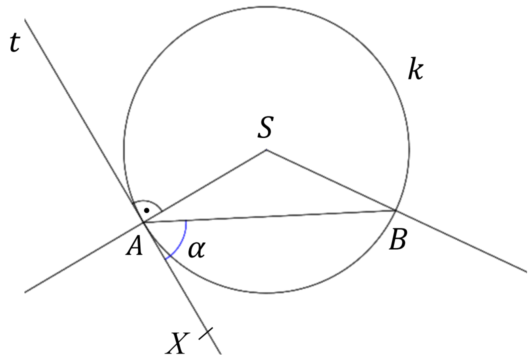
[67] KRYNICKÝ, Martin. Učebnice matematiky pro gymnázia: Planimetrie. *Učebnice matematiky pro gymnázia: Planimetrie* [online]. Strakonice: www.realisticky.cz, 2010, 2010 [cit. 2019-01-27]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/ucebnice/01%20Matematika%20S%C5%A0/03%20Planimetrie/02%20Z%C3%A1kladn%C3%AD%20planimetrick%C3%A9%20v%C4%9Bty/09%20V%C4%9Bta%20o%20obvodov%C3%A9m%20a%20st%C5%99edov%C3%A9m%20%C3%BAhlu.pdf

Větu s největší pravděpodobností znali už Egypťané a Babyloňané. Jako první ji však dokázal až Thalés z Milétu (zhruba 600 l. př. n. l.).

Thaletova věta je zvláštním případem věty o středovém a obvodovém úhlu-středový úhel má velikost 180°, obvodový pak velikost poloviční, tzn. 90°. [68]

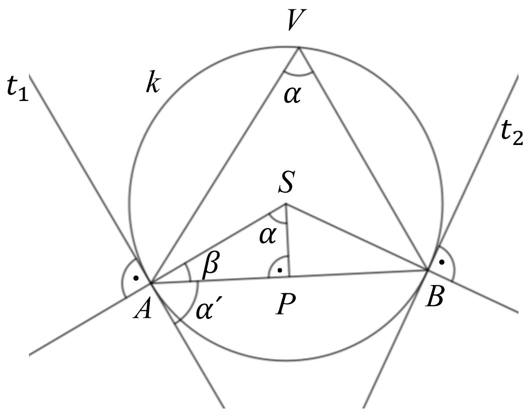
Úsekový úhel

Úhel *BAX* s rameny *AB (AB* je tětiva kružnice)*, AX,* kde *X* je libovolný bod na tečně *t* ke kružnici *k* v bodě *A* zvolený tak, že daný oblouk *AB* je částí tohoto úhlu, se nazývá úsekový úhel příslušný k oblouku *AB*, který v tomto úhlu leží. (Obr. 5. 24)



Obr. 5. 24 Úsekový úhel

Vztah mezi středovým, obvodovým a úsekovým úhlem



Obr. 5. 25 Středový, obvodový a úsekový úhel

Trojúhelník *ABS* (Obr. 5. 25) je rovnoramenný ($|AS| = |BS|$, základna *AB* (tětiva kružnice *k*)).

Výška na základnu *AB* rozdělí středový úhel na dva stejně velké – mají poloviční velikost než středový úhel-mají velikost úhlu α.

V trojúhelníku *APS* má úhel β velikost $\beta = 90° - \alpha$

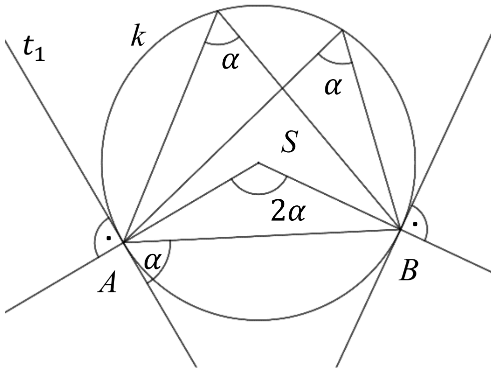
$\alpha' + \beta = 90°$ (polopřímka AR je tečnou ke kružnici *k*, je kolmá na poloměr AS) $\Rightarrow$ $\alpha' = 90° - \beta$

$\alpha' = 90° - (90° - \alpha)$

$\alpha' = \alpha$

[68] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 9., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN isbn:978-80-7196-356-1, str. 431

Obvodový a úsekový úhel mají tedy stejnou velikost. Středový úhel má oproti těmto dvěma úhlům velikost dvojnásobnou. (Obr. 5. 26) [69]



[70]

Obr. 5. 26

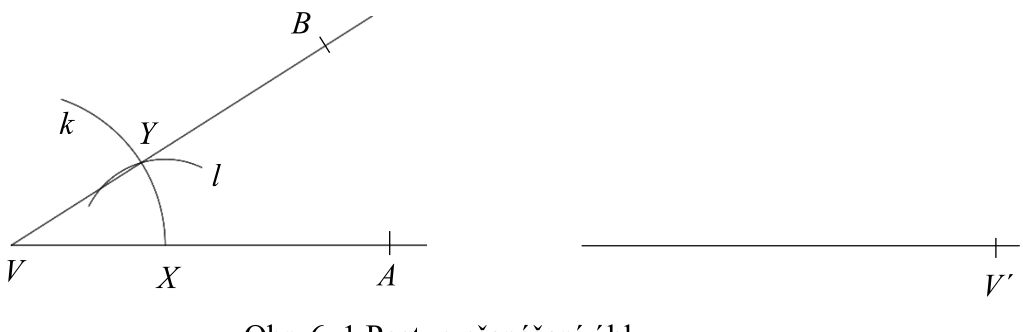
6. Početní operace s úhly

6. 1. Sčítání a odčítání úhlů

Sčítat úhly můžeme početně i graficky.

Předtím, než se pustíme do sčítání (a odčítání) úhlů, musíme si ukázat, jak graficky přenášet úhly. Všechny grafické operace s úhly provádíme s využitím pouze pravítka a kružítka (eukleidovské konstrukce).

<u>Příklad 1</u>: Úhel AVB přeneste na danou polopřímku s počátkem V' tak, aby byl bod V' vrcholem přeneseného úhlu. (Obr. 6. 1)

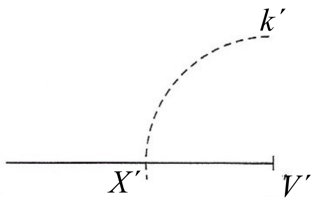


Obr. 6. 1 Postup přenášení úhlu

[69] SUSSELMILCH, David. Planimetrie: úsekový úhel. *Planimetrie: úsekový úhel* [online]. Praha: TOPlist, 1997, 1997 [cit. 2019-01-27]. Dostupné z: http://planimetrie.kvalitne.cz/uhly_usekovy.html
[70] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 9., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN isbn:978-80-7196-356-1, str. 430-431

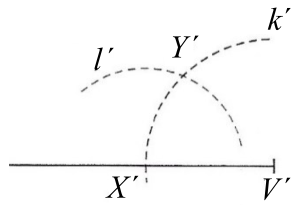
Postup:

1) Ve vrcholu V' sestrojíme kružnici k' se stejným poloměrem jako má kružnice k. Průsečík kružnice k' s danou polopřímkou označíme X'. (Obr. 6. 2)



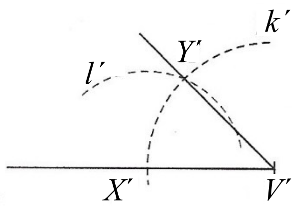
Obr. 6. 2 Postup přenášení úhlu

2) Sestrojíme kružnici l' se středem v bodě X' s poloměrem $|XY|$. Průsečík kružnic k' a l' označíme Y'. (Obr. 6. 3)



Obr. 6. 3 Postup přenášení úhlu

3) Sestrojíme polopřímku $V'Y'$ - tvoří druhé rameno přeneseného úhlu $X'V'Y'$. (Obr. 6. 4)

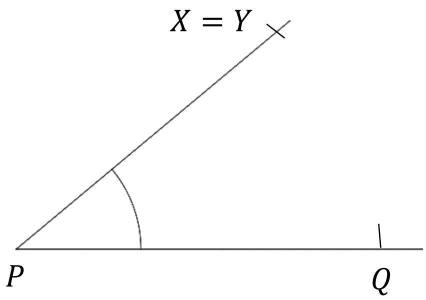


[71]

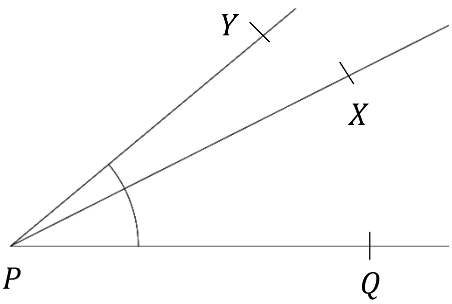
Obr. 6. 4 Postup přenášení úhlu-dokončení

Přenesením úhlů můžeme snadno zjistit, zda dva dané konvexní úhly ($\sphericalangle AVB, \sphericalangle CUD$) jsou shodné. Oba úhly přeneseme ke zvolené polopřímce (PQ) (do stejné poloroviny) tak, že budou mít společný vrchol P. Jestliže polopřímky PX, PY splynou, jsou úhly AVB, CUD shodné. (Obr. 6.5) Pokud polopřímky PX, PY nesplynou, úhly AVB, CUD shodné nejsou. (Obr. 6. 6)

[71] PALKOVÁ, Martina. *Průvodce matematikou 2, aneb, Co byste měli znát z geometrie ze základní školy*. Brno: Didaktis, 2007. Co byste měli znát ze základní školy. ISBN 978-80-7358-083-4, str. 19.



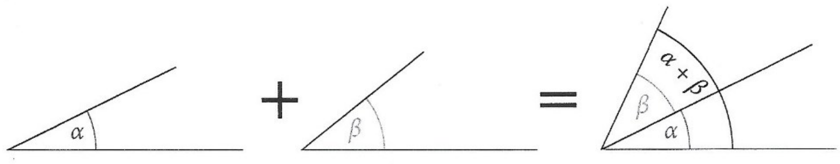
Obr. 6. 5 Shodné úhly



Obr. 6. 6 Neshodné úhly

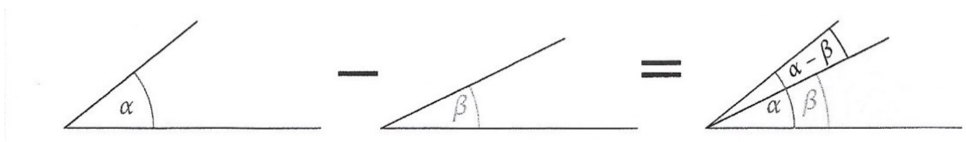
6. 1. 1. Grafické sčítání a odčítání úhlů

Graficky úhly α, β sčítáme tak, že jeden úhel přeneseme k druhému (popsaným způsobem) mimo úhel tak, aby měly společné rameno se společným vrcholem. Vytvoříme tak dvojici styčných úhlů. Grafickým součtem těchto úhlů je pak jejich sjednocení. Krajní ramena svírají výsledný úhel $\alpha + \beta$. (Obr. 6. 5)



Obr. 6. 5 Grafické sčítání úhlů

Graficky úhly α, β $(\alpha > \beta)$ (Obr. 6. 6) odčítáme tak, že úhel β přeneseme do úhlu α tak, aby měly společné rameno se společným vrcholem. Ramena úhlů α, β, která spolu nesplývají, svírají výsledný úhel, jehož velikost se rovná rozdílu úhlů α, β .



Obr. 6. 6 Grafické odčítání úhlů

V případě, že je naopak $\alpha < \beta$, lze určit pouze $\beta - \alpha$.

Odčítat můžeme vždy pouze úhel s menší velikostí od úhlu s větší velikostí (pořadí nelze prohodit). Jedinou výjimkou je případ, kdy mají oba úhly stejnou velikost. Jejich rozdílem je pak úhel o velikosti 0° (nulový úhel).

[72] PALKOVÁ, Martina. *Průvodce matematikou 2, aneb, Co byste měli znát z geometrie ze základní školy*. Brno: Didaktis, 2007. Co byste měli znát ze základní školy. ISBN 978-80-7358-083-4, str. 20.

6. 1. 2. Početní sčítání a odčítání úhlů

Chceme-li sčítat (odčítat) velikosti úhlů, sčítáme (odčítáme) zvlášť stupně, zvlášť minuty, zvlášť vteřiny.

Příklad 1: Sečtěte úhly $\alpha = 48°\,15'\,23''$ a $\beta = 95°\,27'\,31''$.

$$\frac{\begin{array}{r}48°\,15'\,23''\\ 95°\,27'\,31''\end{array}}{143°\,42'\,54''} \rightarrow \quad \underline{\alpha + \beta = 143°\,42'\,54''}$$

Pokud při sčítání úhlů dojde k tomu, že počet minut (vteřin) bude větší nebo roven 60, převedeme tento počet na stupně (minuty) podle následujícího pravidla.

$1° = 60'$ $\quad 1' = 60''$

Příklad 2: Sečtěte úhly $\alpha = 48°\,51'\,32''$ a $\beta = 95°\,27'\,31''$

$$\frac{\begin{array}{r}48°\,51'\,32''\\ 95°\,27'\,31''\end{array}}{143°\,78'\,63''} = 143°\,79'\,03'' = \underline{144°\,19'\,03''}$$

Pokud při odčítání úhlů nastane situace, že menšitel má více minut (vteřin) než menšenec, musíme si nejprve „vypůjčit" potřebný počet stupňů (minut) a převést je na minuty (vteřiny) tak, abychom mohli úhly odečíst.

Příklad 3: Odečtěte úhly $\alpha = 148°\,11'\,32''$ a $\beta = 95°\,27'\,13''$

$$\frac{\begin{array}{r}148°\,11'\,32''\\ 95°\,27'\,13''\end{array}}{-} = \frac{\begin{array}{r}147°\,71'\,32''\\ -\,95°\,27'\,13''\end{array}}{52°\,44'\,19''}$$

Příklad 4: Odečtěte úhly $\gamma = 87°\,32'\,15''$ a $\delta = 54°\,42'\,33''$

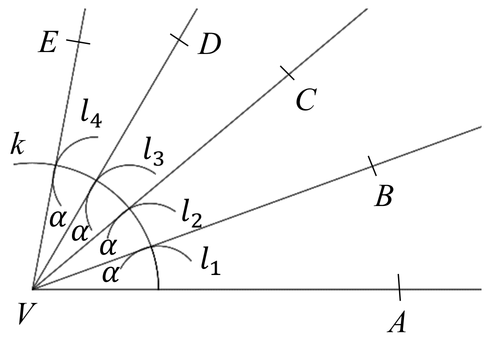
$$\frac{\begin{array}{r}87°\,32'\,15''\\ 54°\,42'\,33''\end{array}}{-} = \frac{\begin{array}{r}86°\,92'\,15''\\ -54°\,42'\,33''\end{array}}{-} = \frac{\begin{array}{r}86°\,91'\,75''\\ -54°\,42'\,33''\end{array}}{32°\,49'\,42''}$$

6. 2. Násobení úhlů přirozeným číslem

6. 2. 1. Grafické násobení úhlů přirozeným číslem

Graficky násobit úhel znamená, že daný úhel budeme několikrát přičítat.

Máme-li například graficky určit čtyřnásobek nějakého úhlu, přičteme k tomuto úhlu 3 úhly stejné velikosti. (Obr. 6. 7)



Obr. 6. 7

$$|\measuredangle AVB| = |\measuredangle BVC| = |\measuredangle CVD| = |\measuredangle DVE| = \alpha$$

$$|\measuredangle AVE| = 4 \cdot |\measuredangle AVB| = 4\alpha$$

6. 2. 2. Početní násobení úhlů přirozeným číslem

Chceme-li úhly vynásobit numericky, vynásobíme (stejně jako při sčítání) zvlášť stupně, zvlášť minuty a zvlášť vteřiny. Pokud po vynásobení bude mít výsledek více než 60 vteřin, převedeme je na minuty. Obdobně minuty převedeme na stupně.

Příklad 1: Vypočítejte: $4 \cdot \alpha$, je-li $\alpha = 32° \; 16' \; 12''$

4 · 32° 16′ 12′′ = 128° 64′ 48′′ = 129° 04′ 48′′

6. 3. Dělení úhlů

Graficky můžeme obecný úhel dělit 2, 4, 8 atd. Obecně lze říci, že graficky dělit úhel můžeme hodnotami 2^n, kde *n* je přirozené číslo. Úhly o velikosti 360°, 180°, 90° a 45° můžeme dělit též třemi, 360°, 180°, 90° šesti, 360°, 180° dvanácti, atd.

Příklad 1: Vypočítejte: α : 2, je-li α = 84° 30′

84° 30′ : 2 = 42° 15′

Pokud není některá z daných hodnot daným dělitelem celočíselně dělitelná, postupujeme tak, že si buď „vypůjčíme“ potřebný počet z větší jednotky, (minuty ze stupňů, vteřiny z minut) a převede podle pravidla 1° = 60′, 1′ = 60′′, nebo převedeme zbytek z tohoto dělení na menší jednotku a pokračujeme v dělení.

Příklad 2: Vypočítejte: α : 4, je-li α = 137° 20′

137° 20′ : 4 = 136° : 4 + (1° + 20′) : 4 = 34° + 80′ : 4 = 34° + 20′ = 34° 20′

Příklad 3: Vypočítejte: α : 4, je-li α = 148° 02′

148° 02′ : 4 = 144° : 4 + (2° + 2′) : 4 = 36° + (120′ + 2′) : 4 = 36° + 30′ + 2′ : 4
= 36° 30′ + 120′′ : 4 = 36° 30′ 30′′

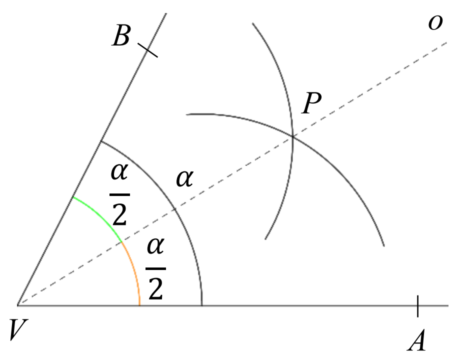
Příklad 4: Vypočítejte: α : 5, je-li α = 137° 17′

137° 17′ : 5 = 135° : 5 + (2° + 17′) : 5 = 27° + (120′ + 17′) : 5 = 27° + 137′ : 5
= 27° + 27′ + 2′ : 5 = 27° 27′ + 120′′ : 5 = 27° 27′ 24′′

6. 3. 1. Osa úhlu

Osa úhlu je polopřímka, která daný úhel dělí na dvě stejné části (úhly s velikostí jedné poloviny původního úhlu). Osa úhlu je množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od obou ramen úhlu.

Pomocí kružítka označíme úhel obloučkem libovolného poloměru. Postupně sestrojíme z obou průsečíků tohoto oblouku a ramen oblouky o stejném poloměru. Průsečík těchto dvou oblouků spojíme s vrcholem úhlu. Tato polopřímka je osou úhlu. Změřením pomocí úhloměru můžeme zkontrolovat, že osa původní úhel půlí. (Obr. 6. 8)



Obr. 6. 8 Osa úhlu

$$|\sphericalangle AVP| = |\sphericalangle PVB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle AVB| = \frac{1}{2}\alpha$$

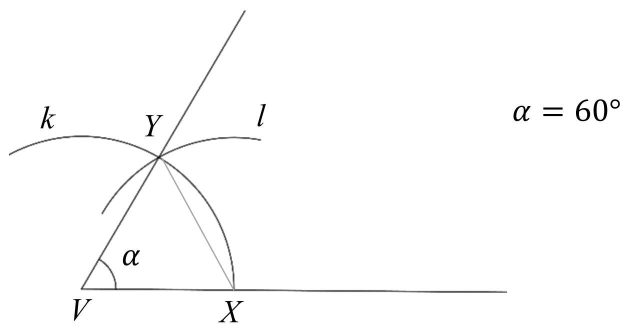
Při početní operaci postupujeme obdobně jako v předchozích výpočtech.

6. 3. 2. Konstrukce úhlu dané velikosti-bez použití úhloměru

<u>Konstrukce úhlu o velikosti 60°</u>

Konstrukci tohoto úhlu začneme tím, že sestrojíme libovolnou polopřímku VX. Dále sestrojíme kružnici $k(V, r = |VX|)$ a kružnici $l(X,\ r = |VX|)$. Průsečíkem těchto dvou kružnic je bod Y. Polopřímka VY tvoří druhé rameno hledaného úhlu. (Obr. 6. 9)

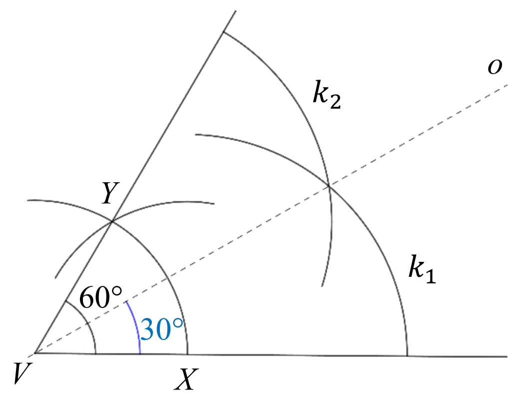
Tímto postupem v podstatě sestrojíme rovnostranný trojúhelník VXY. Využíváme zde vlastnost rovnostranného trojúhelníku, že všechny vnitřní úhly mají velikost 60°.



Obr. 6. 9 Konstrukce úhlu o velikosti 60°

Konstrukce úhlu o velikosti 30°

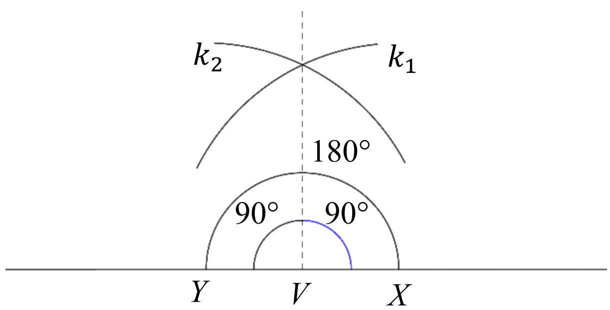
Nejprve sestrojíme právě popsaným způsobem úhel o velikosti 60°. Tento úhel pak osou rozdělíme na poloviny. Tím získáme úhel o velikosti 30°. (Obr. 6. 10)



Obr. 6. 10 Konstrukce úhlu o velikosti 30°

Konstrukce úhlu o velikosti 90°

Nejprve sestrojíme přímý úhel. Poté zkonstruujeme osu tohoto úhlu. Ta nám úhel rozdělí na dva pravé úhly. (Obr. 6. 11)



Obr. 6. 11 Konstrukce úhlu o velikosti 90°

S využitím grafického sčítání, odčítání, dělení a násobení úhlů lze pak sestrojit další úhly-např. 120°, 45°, 135°, 150° atd.

6. 3. 3. Trisekce úhlu

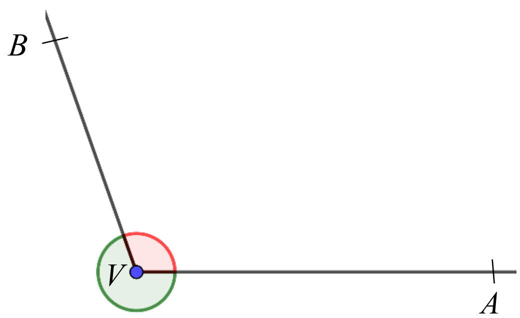
Trisekcí úhlu rozumíme konstrukční rozdělení úhlu na tři stejné části za užití pouze pravítka a kružítka (pro obecný úhel). V případě, že budeme chtít dělit přímý nebo plný úhel, je úloha snadno řešitelná, protože sestrojit úhel o velikosti 60° lze snadno. Stejně tak není problém graficky na třetiny rozdělit pravý úhel. Stačí opět využít úhel o velikosti 60° a ten pak osou rozdělit na dva úhly s velikostí 30°. Tím nám vzniknou tři úhly této velikosti.

Tím, jak rozdělit na třetiny úhel obecné velikosti, se matematici zabývali již zhruba od 5. st. př. n. l. Teprve v 19. století se francouzskému matematikovi Évaristu Galoisovi podařilo dokázat, že je úloha neřešitelná.

Trisekce úhlu je jedním z tzv. klasických konstrukčních problémů antické matematiky. Dalšími dvěma jsou kvadratura kruhu (k danému kruhu zkonstruovat čtverec o stejném obsahu pouze-za užití pravítka a kružítka) a duplikace krychle (k dané krychli zkonstruovat krychli s dvojnásobným objemem pouze za užití pravítka a kružítka). [73]

7. Orientovaný úhel

Několikrát již zde bylo zmíněno, že úhel tvoří dvě polopřímky (ramena) se společným počátkem (vrcholem). Zmíněné polopřímky VA, VB vždy v rovině vytyčí dva úhly. Pokud nejsou tyto úhly shodné (180°), je jeden úhel větší (nekonvexní) a jeden menší (konvexní). V obou případech se však jedná o úhel $\measuredangle AVB$. (Obr. 7. 1)

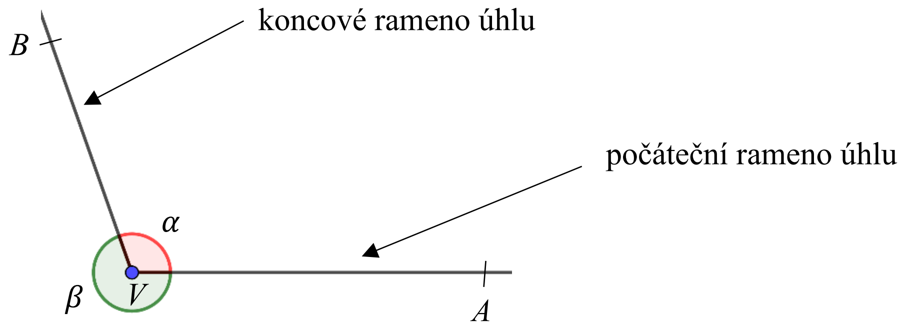


Obr. 7. 1 Úhel AVB

Pokud není úhel AVB blíže určen, není jasné, o kterém z těchto úhlů vlastně mluvíme. Většinou předpokládáme, že správným úhlem je ten s menší velikostí. Tento náš předpoklad však nemusí být vždy správný. Abychom předešli možnému nedorozumění, zavádíme pojem orientovaný úhel.

Předtím však ještě musíme zavést dva nové pojmy, tj. počáteční a koncové rameno úhlu. (Obr.7. 2). Polopřímku VA nazveme počátečním ramenem, polopřímku VB pak koncovým ramenem úhlu AVB.

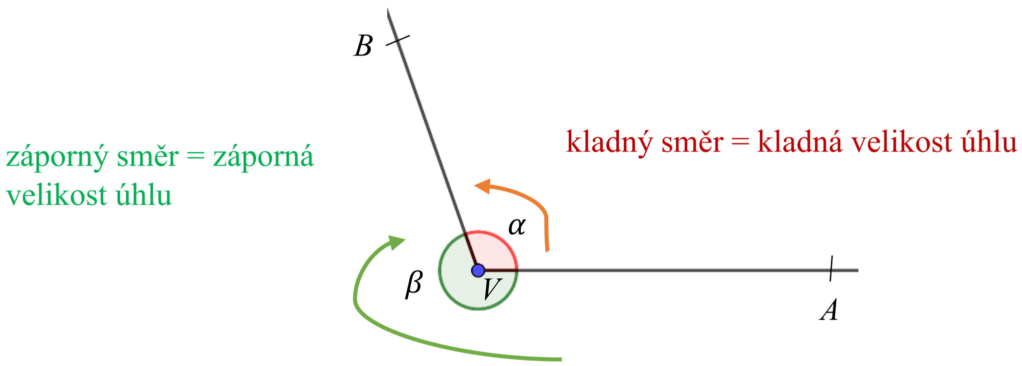
[73] ROKYTA, Mirko. Trisekce úhlu, kvadratura kruhu a jiné podobné "nemožné úlohy". *Trisekce úhlu, kvadratura kruhu a jiné podobné "nemožné úlohy"* [online]. Praha: katedra matematické analýzy MFF UK Praha [cit. 2019-02-01]. Dostupné z: http://www.talnet.cz/documents/18/39cdd2ad-93d3-4dca-afb4-97796ebeaed8



Obr. 7. 2 Úhel AVB-s počátečním a koncovým ramenem

Z toho, že zavádíme pojmy počáteční a koncové rameno úhlu, je zřejmé, že záleží na pořadí ramen úhlu, který vznikl tak, že jedno z ramen, která se původně překrývala, se pohnulo (bod V zůstává společným počátkem polopřímek) a dostalo se až do pozice koncového ramene.

A nyní nastává okamžik, kdy musíme odlišit, kterým směrem se rameno úhlu „vydalo“. Vznikl-li úhel pohybem ramene proti směru pohybu hodiových ručiček, má úhel kladnou velikost. Naopak, pokud úhel vznikl tak, že se rameno úhlu pohybovalo po směru hodinových ručiček, jedná se o úhel se zápornou velikostí. (Obr. 7. 3)



[74]

Obr. 7. 3 Orientovaný úhel

Orientovaným úhlem pak označíme uspořádanou dvojici polopřímek se společným počátkem. Zapsat ho můžeme dvěma způsoby. Buď $\langle \overrightarrow{VA}, \overrightarrow{VB} \rangle$, nebo spíše jednodušeji $\widehat{AVB}$.

U takto definovaného úhlu hovoříme o základní velikosti orientovaného úhlu. Ta vznikne pohybem počátečního ramene VA do polohy koncového ramene VB proti směru pohybu hodinových ručiček, tzn. v kladném směru. Základní velikost orientovaného úhlu je vždy v intervalu $\langle 0°, 360°)$, nebo je-li velikost úhlu vyjádřena v obloukové míře $\langle 0, 2\pi)$.

[74] Orientovaný úhel. In: *Matematika.cz* [online]. 2006 [cit. 2019-06-12]. Dostupné z: https://matematika.cz/orientovany-uhel

Zprava je tento interval otevřený, protože, má-li úhel velikost 360° (2π), koncové rameno VB splyne s počátečním ramenem VA. Velikost úhlu je tím pádem rovna 0°. [75]

V případě, že velikost úhlu přesáhne 360°, znamená to, že koncové rameno VB úhlu opsalo úhel 360° (a to případně i několikrát) a pohybovalo se daným směrem dále. Každou takovou velikost úhlu můžeme vyjádřit v základní velikosti jednoduchým výpočtem. Od dané velikosti odečteme 360° tolikrát, kolikrát je to možné (aniž bychom dostali úhel se zápornou velikostí). To lze provést jak ve stupňové, tak v obloukové míře.

<u>Příklad 1</u>: Velikost daného orientovaného úhlu vyjádřete v základní velikosti:

a) 540° b) 960° c) $\frac{9}{4}\pi$ d) $\frac{17}{2}\pi$

Řešení: a) 540° = 360° + 180° → základní velikost = 180°

b) 960° = 2 · 360° + 240° → základní velikost = 240°

c) $\frac{9}{4}\pi = 2\pi + \frac{1}{4}\pi$ → základní velikost je $\frac{1}{4}\pi$

d) $\frac{17}{2}\pi = 8\pi + \frac{1}{2}\pi$ → základní velikost je $\frac{1}{2}\pi$

8. Goniometrie

Předtím, než se začneme věnovat vlastnostem goniometrických funkcí, považuji za důležité zmínit, co je vlastně funkce. S vlastnostmi, které u funkcí sledujeme, se budeme seznamovat postupně.

Máme dány dvě neprázdné množiny A, B reálných čísel $(A \subset R, B = R)$. Přiřadíme-li každému číslu $x \in A$ právě jedno číslo $y \in B$, pak se toto jednoznačné přiřazení (zobrazení) reálných čísel nazývá reálná funkce reálné proměnné x (funkce proměnné x). Značí se f (nebo $f(x)$). Proměnnou x nazýváme argumentem funkce f, jednotlivá čísla množiny A hodnotami proměnné (argumentu). [76]

Definovat goniometrické funkce je možné několika způsoby-pomocí vlastností, řad, jednotkové kružnice, pravoúhlého trojúhelníku atd.

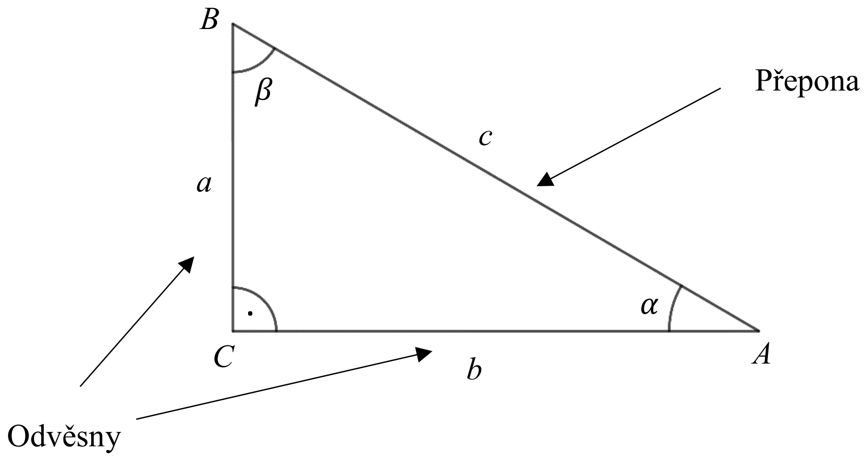
8. 1. Goniometrické funkce definované pomocí pravoúhlého trojúhelníku

Toto zavedení goniometrických funkcí je pro následné výpočty nejdůležitějším. Proto jej uvádím na prvním místě.

[75] MOTYČKOVÁ, Marie. Goniometrie a trigonometrie, orientovaný úhel: Využití internetu ve výuce goniometrie na střední škole. *Goniometrie a trigonometrie, orientovaný úhel: Využití internetu ve výuce goniometrie na střední škole* [online]. Praha: Matematicko-fyzikální fakulta UK, 2006, 2006 [cit. 2019-02-26]. Dostupné z: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/motyckova/Stranky_s_aplety/Orientovany_uhel.html

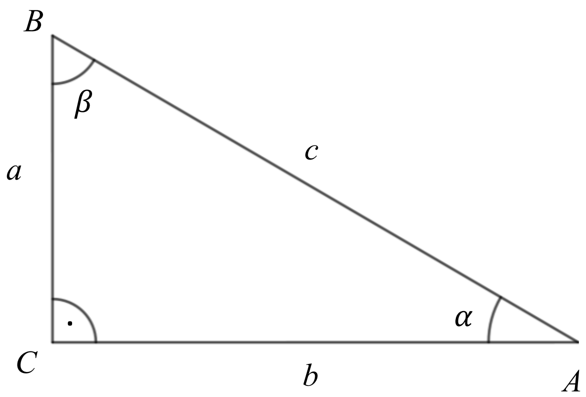
[76] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 9., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN isbn:978-80-7196-356-1, str. 130.

Máme-li pravoúhlý trojúhelník *ABC* s pravým úhlem při vrcholu *C*, nazýváme strany *a, b* odvěsnami, stranu *c* přeponou (vždy nejdelší ze všech tří stran pravoúhlého trojúhelníka). Trojúhelník *ABC* může vypadat například jako na (Obr. 8. 1).



Obr. 8. 1 Odvěsny a přepona v pravoúhlém trojúhelníku

Pro definování jednotlivých goniometrických funkcí nestačí určit, která strana je odvěsnou a která přeponou. Důležitý je fakt, jakou polohu má odvěsna vzhledem k danému úhlu, tzn., je-li přilehlá (leží při úhlu) nebo protilehlá (leží proti úhlu). (Obr. 8. 2)



α: *a* …… protilehlá odvěsna
b …… přilehlá odvěsna

β: *a* …… přilehlá odvěsna
b …… protilehlá odvěsna

Obr. 8. 2 Přilehlá a protilehlá odvěsna v pravoúhlém trojúhelníku

Jednotlivé goniometrické funkce jsou definovány poměrem délek stran pravoúhlého trojúhelníku *ABC* (Obr. 8. 2) takto:

<u>sinus</u>

$$\sin\alpha = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{a}{c}$$

$$\sin\beta = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{b}{c}$$

<u>kosinus</u>

$$\cos\alpha = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos\beta = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{a}{c}$$

tangens

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}} = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}} = \frac{b}{a}$$

kotangens

$$\operatorname{cotg}\beta = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{protilehlá odvěsna}} = \frac{b}{a}$$

$$\operatorname{cotg}\beta = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{protilehlá odvěsna}} = \frac{a}{b}$$

Goniometrické funkce, definované pomocí pravoúhlého trojúhelníku, jsou jen pro ostré úhly.

8. 2. Goniometrické funkce definované pomocí jednotkové kružnice

Hodnoty goniometrických funkcí můžeme vyčíst z jednotkové kružnice, tzn. kružnice *k* se středem *O* o poloměru jedna.

Průsečík této kružnice s koncovým ramenem orientovaného úhlu α označíme *C*. Bodem *C* sestrojíme kolmici k ose *x*. Jejich průsečík je na ose *x* obrazem reálného čísla X_C. Bodem *C* dále vedeme kolmici k ose *y*. Jejich průsečík je na ose *y* obrazem reálného čísla Y_C. O číslech X_C, Y_C řekneme, že jsou první a druhou souřadnicí bodu *C*, značíme $C[X_C, Y_C]$. (Obr. 8. 3)

První souřadnici bodu *C* jednotkové kružnice na koncovém rameni orientovaného úhlu α v základní poloze nazýváme kosinus α. Hodnotu funkce kosinus „odečteme" na ose *x* (zelená). (Obr. 8. 3)

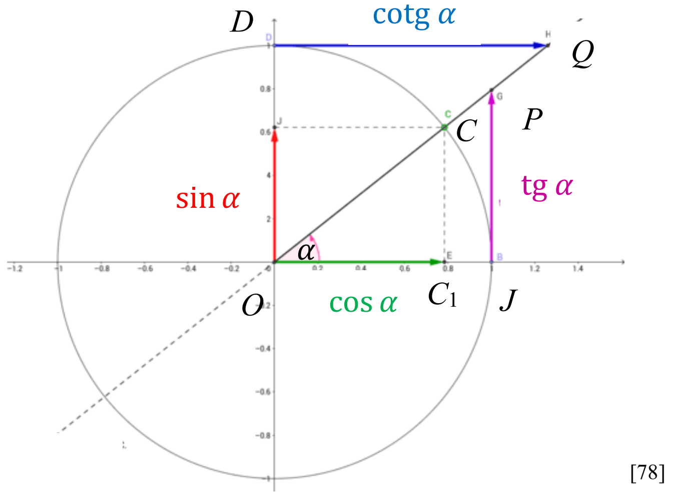
Druhou souřadnici bodu *C* jednotkové kružnice na koncovém rameni orientovaného úhlu α v základní poloze nazýváme sinus α. Hodnotu funkce sinus „odečteme" na ose *y* (červená). (Obr. 8. 3)

Uvedenými definičními vztahy je každému reálnému číslu přiřazeno právě jedno reálné číslo $\sin x$ a právě jedno reálné číslo $\cos x$. Tyto vztahy udávají funkční předpisy funkce sinus: $y = \sin x$ a funkce kosinus: $y = \cos x$, *x* se nazývá argument funkce.

Hodnoty funkcí tangens a kotangens argumentu *x* sestrojíme opět pomocí souřadnic bodů *C* jednotkové kružnice *k*. Patu kolmice vedené bodem *C* k ose *x* značíme C_1. V bodech $J[1,0]$, $D[0,1]$ sestrojíme tečny kružnice *k*, které jsou rovnoběžné po řadě se souřadnicovými osami *y*, *x*. Přímka *OC* protne tyto tečny po řadě v bodech *P*, *Q*. Z podobnosti trojúhelníků $\Delta\, C_1OC \sim \Delta\, JOP$ a $\Delta\, C_1OC \sim \Delta\, DQO$ plyne, že $|PJ| = |\operatorname{tg}\alpha|$, $|QD| = |\operatorname{cotg}\alpha|$, takže $P[1, \operatorname{tg}\alpha]$, $Q[\operatorname{cotg}\alpha, 1]$. (Obr. 8. 3)

Hodnotě funkce tangens odpovídá délka úsečky *JP* (polopřímka *JP* je tečnou k jednotkové kružnici-prochází bodem *J* $[1, 0]$, *JP* ∥ *y*) (fialová). (Obr. 8. 3)

Hodnotě funkce kotangens odpovídá délka úsečky DQ (polopřímka DQ je tečnou k jednotkové kružnici-prochází bodem $D\ [0, 1]$, $DQ \parallel x$) (modrá). (Obr. 8. 3) [77]



Obr. 8. 3 Goniometrické funkce na jednotkové kružnici

8. 3. Vlastnosti goniometrických funkcí

Goniometrické funkce mají celou řadu vlastností a vztahů. Jejich výčet by byl hodně obsáhlý. Proto zde uvedu pouze ty nejdůležitější a nejčastěji používané. Uvedené vztahy platí pro reálná čísla x a přirozená čísla k.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cos x \neq 0 \qquad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \sin x \neq 0 \qquad x \neq k\pi$$

$$\mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{cotg}\, x = 1 \qquad x \neq k\frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos x + \cos x \sin x$$

[77] MOTYČKOVÁ, Marie. Goniometrie a trigonometrie: Využití internetu ve výuce goniometrie na střední škole. *Goniometrie a trigonometrie: Využití internetu ve výuce goniometrie na střední škole* [online]. Praha: Matematicko-fyzikální fakulta UK, 2006, 2006 [cit. 2019-02-26]. Dostupné z: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/motyckova/Stranky_s_aplety/Uvod.html

[78] Goniometrické funkce na jednotkové kružnici. In: *Geogebra.org* [online]. 2016 10. června 2019 13:28:15 [cit. 2019-06-10]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/m/UM9UEuBR

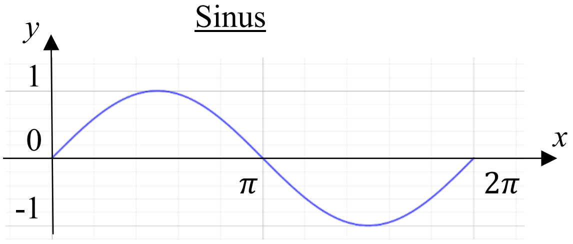
$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ [79]

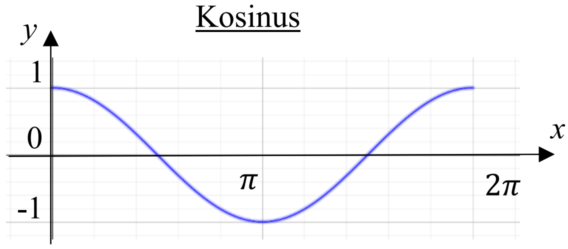
Grafy goniometrických funkcí**:** (Obr. 8. 4-8.7)

Sinus



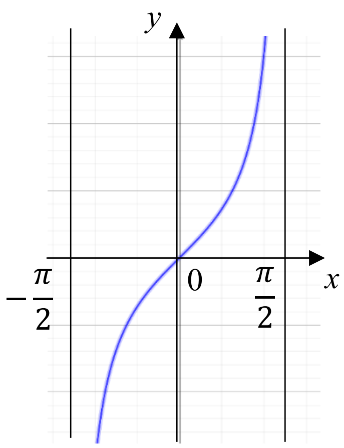
Obr. 8. 4 Funkce sinus

Kosinus



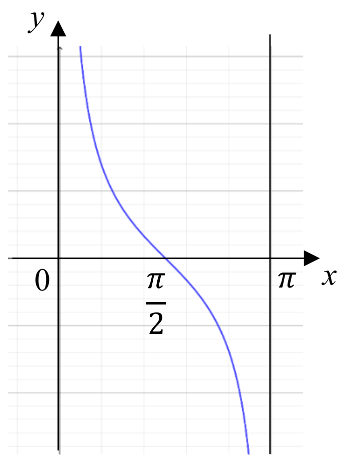
Obr. 8. 5 Funkce kosinus

Tangens



Obr. 8. 6 Funkce tangens

Kotangens



Obr. 8. 7 Funkce kotangens

Tabulka Definičních oborů a Oborů hodnot goniometrických funkcí

Funkce f	$D(f)$	$H(f)$
sin	R	$\langle -1; 1 \rangle$
cos	R	$\langle -1; 1 \rangle$
tg	$R - \left\{(2k+1)\ \frac{\pi}{2}\right\}$	R
cotg	$R - \{k\pi\}$	R

[79] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 9., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN isbn:978-80-7196-356-1, str. 179-180.

Definičním oborem funkce f $(D(f))$ nazýváme množinu všech proměnných x, pro která je daná funkce definována.

U funkcí sinus a kosinus jsou definičním oborem všechna reálná čísla, tzn., že za x můžeme dosadit libovolné reálné číslo. U funkcí tangens a kotangens je situace obtížnější. Funkce tangens je definována jako poměr funkcí sinus ku kosinu $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$. Jmenovatel lomeného výrazu se nikdy nesmí rovnat 0. Proto musíme „ošetřit" případ, kdy by se $\cos\alpha$ rovnal 0. Z definičního oboru tedy musíme vyloučit hodnoty $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ atd. Jde o všechny liché násobky $\frac{\pi}{2}$ tzn. $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, kde $k \in Z$. S funkcí kotangens je situace velmi podobná. Ve jmenovateli $\left(\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$ nesmí být 0. Proto musíme z definičního oboru vyloučit všechny hodnoty, pro které funkce sinus nabývá hodnoty 0. Zde se jedná o celočíselné násobky π, tzn. $k\pi$, kde $k \in Z$.

Oborem hodnot funkce f $(H(f))$ nazýváme množinu všech hodnot y, kterých daná funkce může nabývat (po dosazení za x).

Tabulka významných hodnot goniometrických funkcí

x	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nedef.	0	nedef.	0
cotg x	nedef.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	nedef.	0	nedef.

[80]

Všechny goniometrické funkce jsou periodické, tzn. že hodnoty těchto funkcí se pravidelně opakují. To je možné vyjádřit vztahem: $f(x+P) = f(x)$, kde P je perioda.

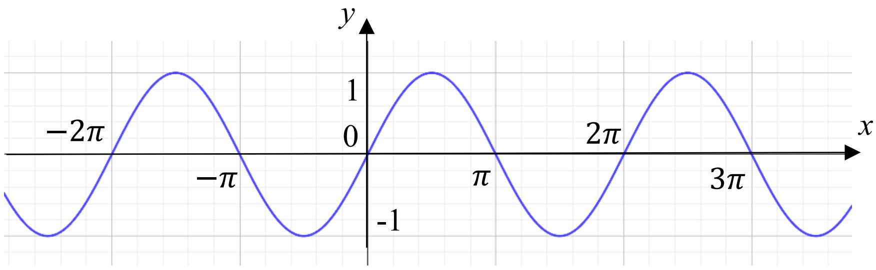
Periody goniometrických funkcí

Funkce	sin	cos	tg	cotg
Perioda	2π	2π	π	π

[80] HUDCOVÁ, Milada. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ, SOU a nástavbové studium*. 2. vydání. Praha: Prometheus, 2005. ISBN 80-7196-318-6, str. 137-148.

Grafy goniometrických funkcí můžeme znázornit takto:

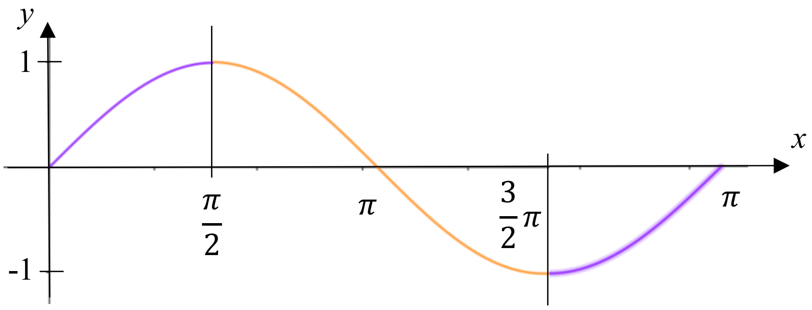
Sinus (Obr. 8. 8)



Obr. 8. 8 Graf funkce sinus

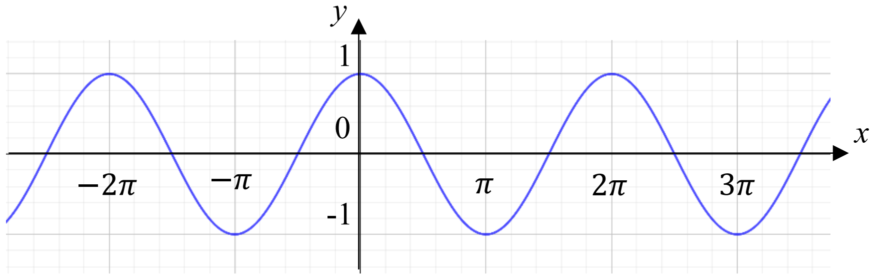
Grafem funkce sinus je křivka, která se nazývá sinusoida.

V dílčích intervalech definičního oboru $\left(x \in \left(2k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right), k \in Z\right)$ je funkce sinus rostoucí, v intervalech $\left(x \in \left((2k+1)\frac{\pi}{2}, 2k\pi\right), k \in Z\right)$ je klesající. Monotónie funkce sinus $x \epsilon (0, 2\pi)$ je znázorněna na (Obr. 8. 9). Funkce sinus proto není v celém svém definičním oboru $(D(f) = R)$ ani rostoucí ani klesající; není monotónní.



Obr. 8. 9 Graf funkce sinus-rostoucí, klesající

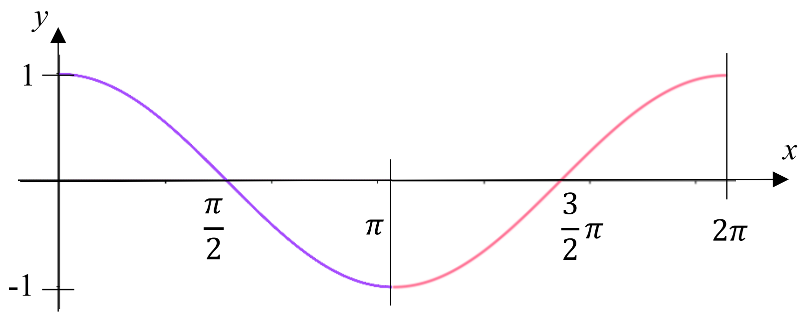
Kosinus (Obr. 8. 10)



Obr. 8. 10 Graf funkce kosinus

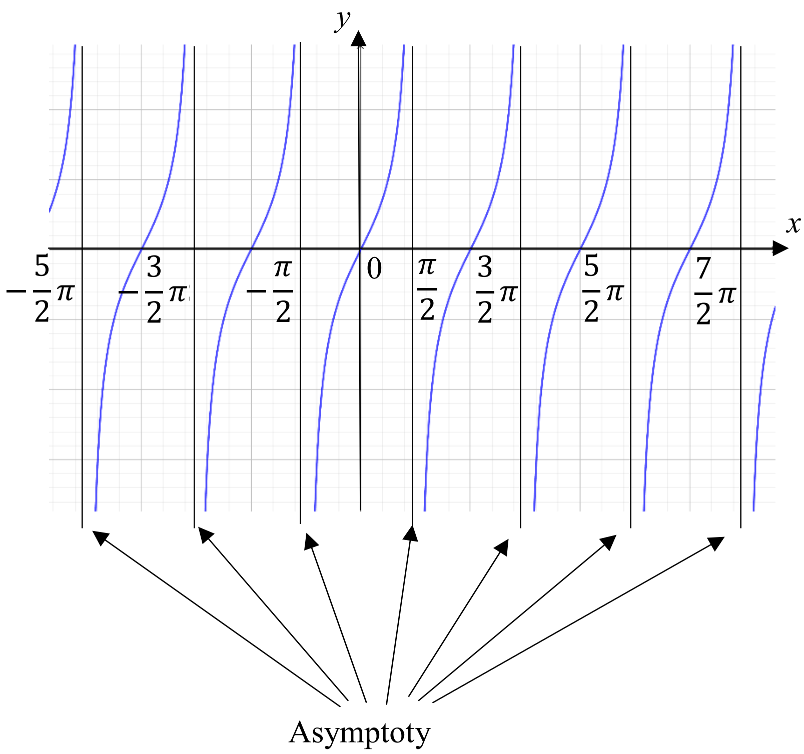
Grafem funkce kosinus je křivka, která se nazývá kosinusoida.

V dílčích intervalech definičního oboru $(x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi), k \in Z)$ je funkce kosinus rostoucí, v jiné části $(x \in (2k\pi, (2k+1)\pi\ ), k \in Z$ je klesající. Monotónie funkce kosinus $x \epsilon (0, 2\pi)$ je znázorněna na (Obr. 8. 11). Funkce kosinus proto není v celém definičním $(D(f) = R)$ oboru ani rostoucí ani klesající; není monotónní.



Obr. 8. 11 Graf funkce kosinus-rostoucí, klesající

Tangens (Obr. 8. 12)



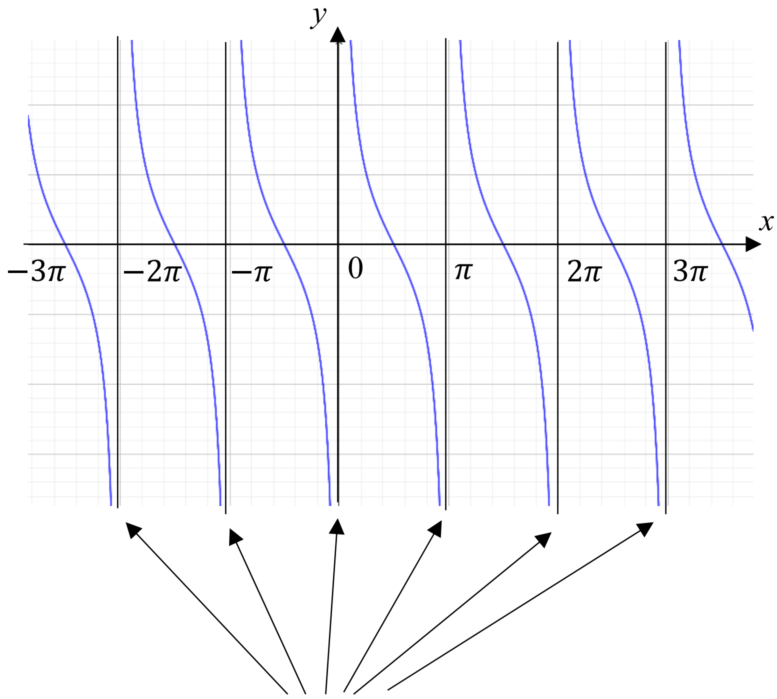
Obr. 8. 12 Graf funkce tangens

Asymptotami jsou přímky, ke kterým se graf funkce nekonečně blíží, ale nikdy se jich nedotkne (ani je neprotne). V případě funkce tangens jsou asymptotami přímky rovnoběžné s osou *y*, které procházejí lichými násobky $\frac{\pi}{2}$ na ose *x*.

Grafem funkce tangens je křivka, která se nazývá tangentoida. Vzhledem k tomu, že definičním oborem funkce tangens nejsou všechna reálná čísla, není grafem v celém definičním oboru $(D(f) = R - k\pi, k\epsilon Z)$ spojitá křivka, ale jsou jimi jednotlivé křivky (kotangetoidy). není grafem tangens spojitá křivka, jako u funkcí sinus a kosinus. Graf tvoří jednotlivé křivky v omezených částech definičního oboru.

Funkce tangens je rostoucí v celém svém definičním oboru; je monotónní.

Kotangens (Obr. 8. 13)



Obr. 8. 13 Graf funkce kotangens

V případě funkce kotangens jsou asymptotami přímky rovnoběžné s osou *y*, které procházejí lichými násobky $\frac{\pi}{2}$ na ose *x*.

Grafem funkce kotangens je křivka, která se nazývá kotangentoida. Podobně jako u funkce tangens není grafem v celém definičním oboru $(D(f) = R - k\pi, k\epsilon Z)$ spojitá křivka, ale jsou jimi jednotlivé křivky (tangetoidy). Podmínkou jsou z definičního oboru vyloučena čísla $k\pi \, , k \in Z$. Asymptotami jsou tak přímky rovnoběžné o osou *y*, které procházejí celočíselnými násobky π.

Funkce kotangens je klesající v celém svém definičním oboru; je monotónní.

U goniometrických funkcí, stejně jako u všech ostatních funkcí, posuzujeme také sudost, resp. lichost funkce.

Pro sudou funkci platí: $f(-x) = f(x)$, pro všechna *x*, pro která je daná funkce definována (tj. pro všechna *x* z definičního oboru $D(f)$). To platí právě tehdy, je-li graf dané funkce souměrný v osové souměrnosti s osou *y*.

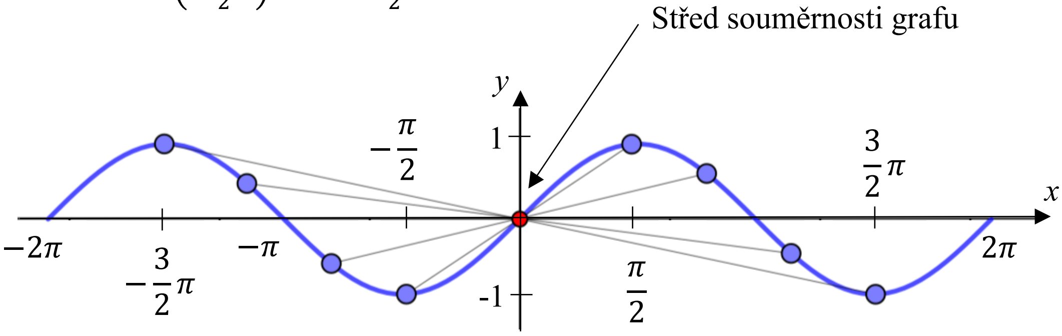
Pro lichou funkci platí: $f(-x) = -f(x)$, pro všechna x, pro která je daná funkce definována (tj. pro všechna x z definičního oboru $D(f)$). To platí právě tehdy, je-li graf dané funkce souměrný ve středové souměrnosti se středem v době $O[0; 0]$.

Sinus

Z (Obr. 8. 14) je patrné, že graf funkce sinus je středově souměrný (se středem $O[0; 0]$).

Platí např. $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$

$\sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = -\sin\frac{3}{2}\pi = 1$



Obr. 8. 14 Souměrnost grafu funkce sinus

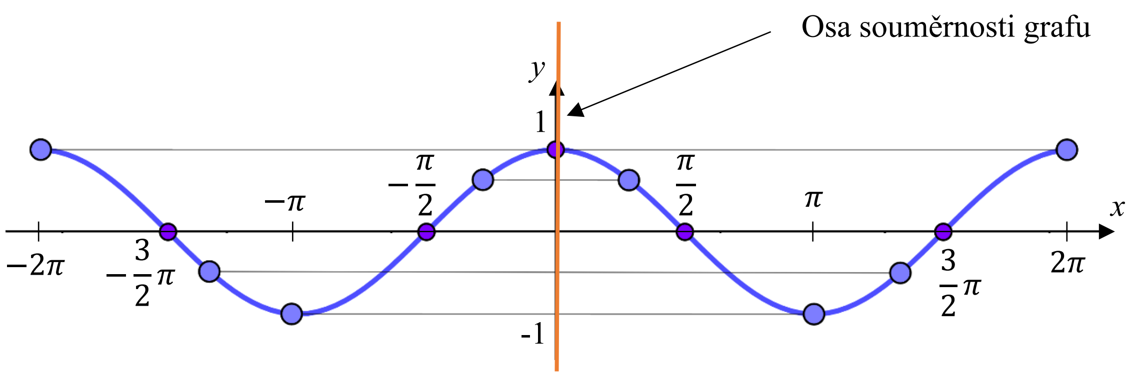
Sinus je funkce lichá.

Kosinus

Z (Obr. 8. 15) je patrné, že graf funkce kosinus je osově souměrný podle osy y.

Platí např. $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$\cos(-2\pi) = \cos 2\pi = 1$



Obr. 8. 15 Souměrnost grafu funkce kosinus

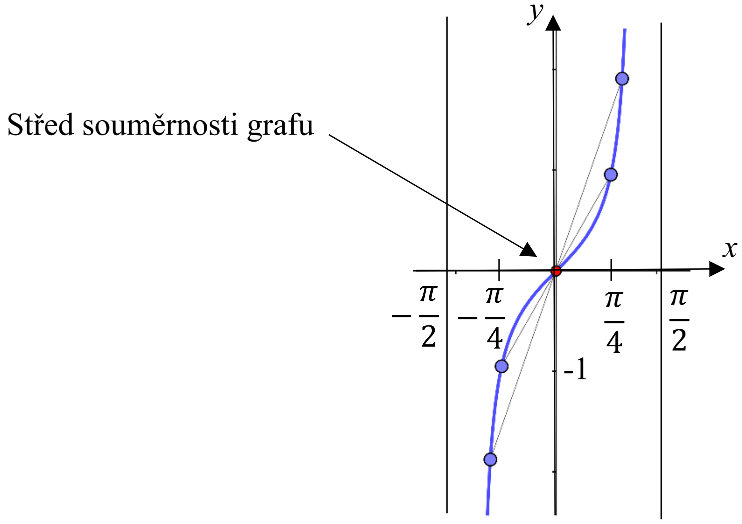
Kosinus je funkce sudá.

Tangens

Z (Obr. 8. 16) je patrné, že graf funkce tangens je, stejně jako graf funkce sinus, středově souměrný (se středem $O[0;0]$).

Platí např. $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1$

$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$



Obr. 8. 16 Souměrnost grafu funkce tangens

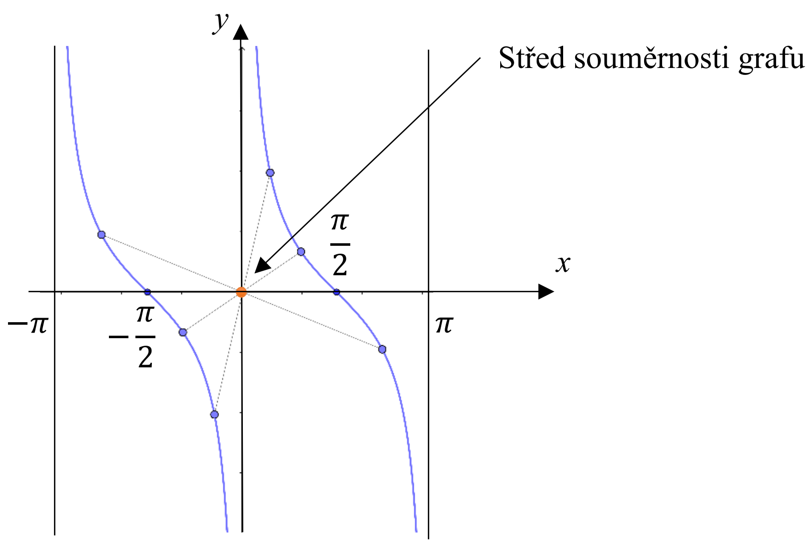
Tangens je funkce lichá.

Kotangens

Z (Obr. 8. 17) je patrné, že graf funkce kotangens je, stejně jako graf funkce sinus a tangens, středově souměrný (se středem $O[0;0]$).

Platí např. $\operatorname{cotg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} = -1$

$\operatorname{cotg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{cotg}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$



Obr. 8. 17 Souměrnost grafu funkce kotangens

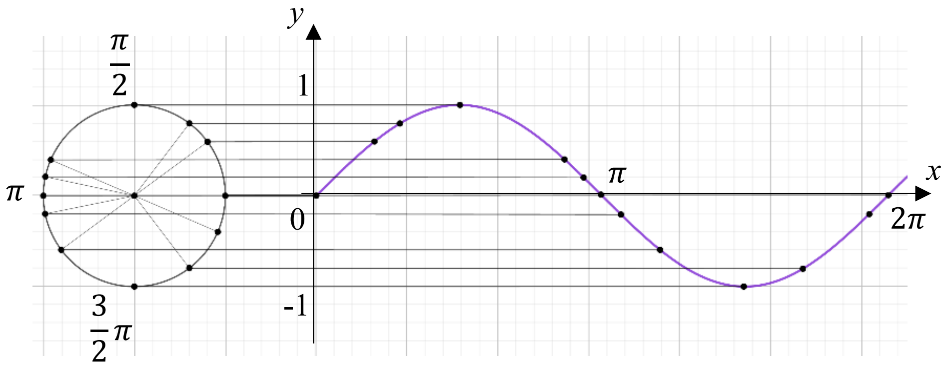
Platí např. $\quad \operatorname{cotg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{cotg}\frac{\pi}{4} = -1$

$$\operatorname{cotg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{cotg}\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Kotangens je funkce lichá.

Grafy goniometrických funkcí a jednotková kružnice

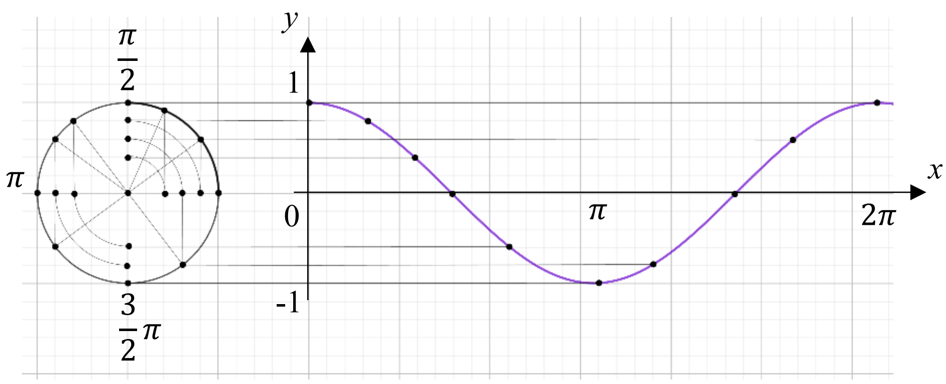
Sinus (Obr. 8. 18)



Obr. 8. 18 Funkce sinus-souvislost grafu a jednotkové kružnice

Hodnoty funkce sinus se zobrazují na ose *y*. Příslušné hodnoty proto můžeme přímo znázornit do grafu.

Kosinus (Obr. 8. 19)

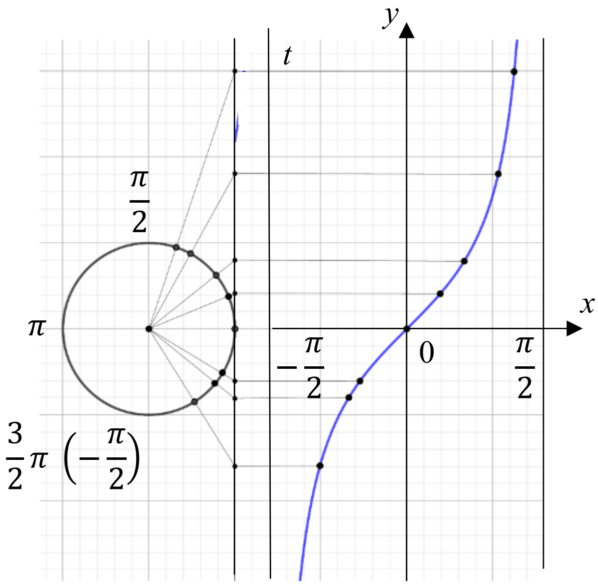


Obr. 8. 19 Funkce kosinus-souvislost grafu a jednotkové kružnice [81]

[81] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 9., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN isbn:978-80-7196-356-1, str. 168

Hodnoty funkce kosinus se zobrazují na ose x. Znázornění je proto obtížnější než u funkce sinus. Příslušné hodnoty je potřeba nejprve znázornit na osu y (otočit osu x o 90°). Pak už můžeme tyto hodnoty znázornit do grafu.

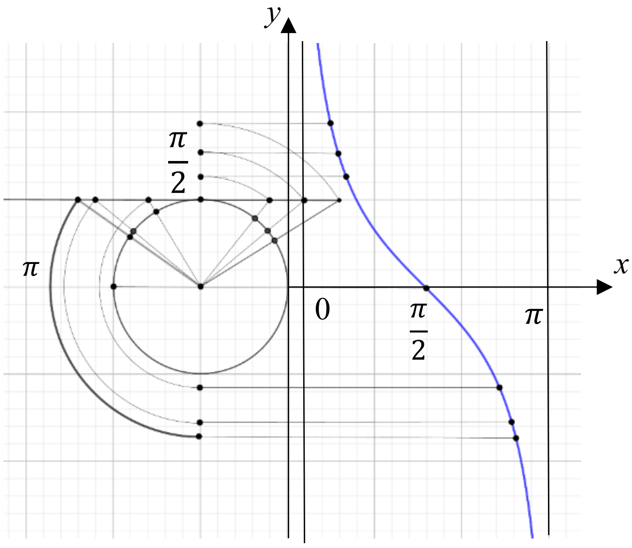
Tangens (Obr. 8. 20)



Obr. 8. 20 Funkce tangens-souvislost grafu a jednotkové kružnice

Hodnoty funkce tangens se zobrazují na tečně k jednotkové kružnici, která prochází bodem o souřadnicích $[1, 0]$ (je tedy rovnoběžná s osou y). Tyto hodnoty můžeme přímo znázornit do grafu.

Kotangens (Obr. 8. 21)



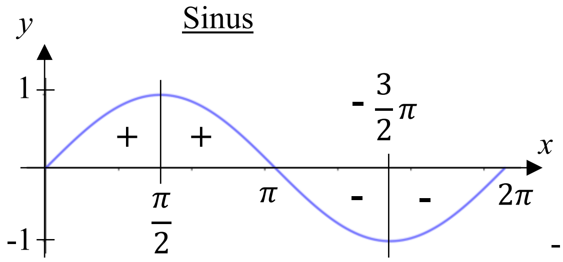
[82]

Obr. 8. 21 Funkce kotangens-souvislost grafu a jednotkové kružnice

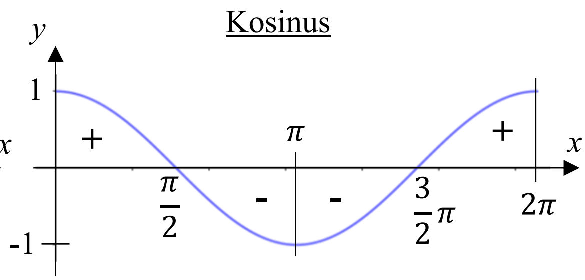
[82] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 9., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN isbn:978-80-7196-356-1, str. 171

Hodnoty funkce kotangens se zobrazují na tečně k jednotkové kružnici, která prochází bodem o souřadnicích $[0, 1]$ (je rovnoběžná s osou x). Znázornění je proto obtížnější než u funkce tangens. Příslušné hodnoty je potřeba nejprve znázornit na osu y (otočit tečnu o 90°), podobně jako osu x u funkce kosinus. Pak už můžeme tyto hodnoty znázornit do grafu.

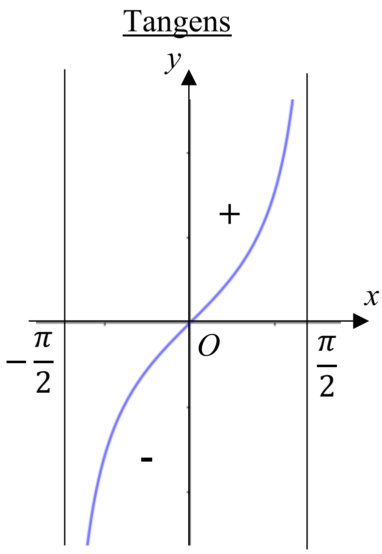
Znaménka hodnot goniometrických funkcí na intervalech (Obr. 8. 22-8. 25)



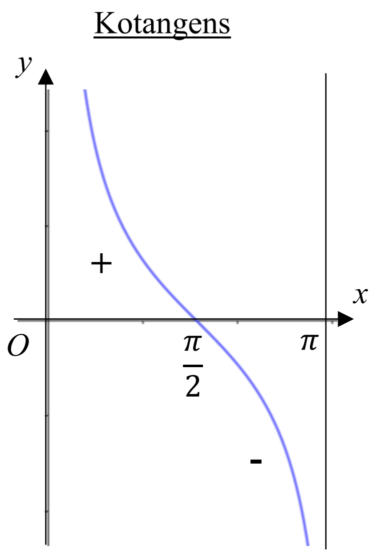
Obr. 8. 22 Funkce sinus



Obr. 8. 23 Funkce kosinus



Obr. 8. 24 Funkce tangens



Obr. 8. 25 Funkce kotangens

	$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$	$\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tg	+	-	+	-
cotg	+	-	+	-

Funkce sinus a kosinus jsou funkce omezené ($H(f) = \langle -1; 1 \rangle$).

Funkce tangens a kotangens nejsou funkce omezené ($H(f) = R$). [83]

[83] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 9., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN isbn:978-80-7196-356-1, str. 164-198

Řešené příklady

Příklad 1: Použitím Pythagorovy věty a vztahů pro goniometrické funkce dokažte platnost vzorce: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Řešení: Vyjdeme z Pythagorovy věty, předpoládáme pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C: $a^2 + b^2 = c^2 \quad / : c^2$

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha \ \wedge \ \frac{b}{c} = \cos\alpha \ \Rightarrow \ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Příklad 2: Použitím definice goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C a vlastností goniometrických funkcí dokažte platnost vzorce: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Řešení: Vyjdeme z definice funkce tangens v pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ Dále zlomek na pravé straně rozšíříme výrazem $\frac{1}{c} \Rightarrow \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha \ \wedge \ \frac{b}{c} = \cos\alpha \ \Rightarrow \ \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Příklad 3:

Použitím vztahů pro funkce tangens a kotangens $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$

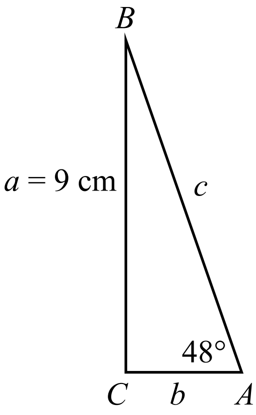
dokažte platnost vztahu: $\operatorname{cotg}\alpha = (\operatorname{tg}\alpha)^{-1}$

Řešení: $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = (\operatorname{tg}\alpha)^{-1}$

$\operatorname{cotg}\alpha = (\operatorname{tg}\alpha)^{-1}$

Příklad 4: V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C je dán úhel $\alpha = 48°$ a strana $a = 9$ cm. Vypočítejte délky zbývajících stran a vnitřní úhly daného trojúhelníku. (Obr. 8. 20)

Řešení:



Obr. 8. 26 △ ABC

Ze zadání (Obr. 8. 26) je jasné, že známe úhel α a odvěsnu, která je vzhledem k tomuto úhlu protilehlá můžeme proto použít funkci sinus (vypočítáme přeponu c), nebo funkci tangens (vypočítáme přilehlou odvěsnu b.

$\sin \alpha = \frac{a}{c}$

$\sin 48° = \frac{9}{c}$

$c = \frac{9}{\sin 48°}$

$c \doteq 12{,}1$ cm

stranu b můžeme dopočítat např.

Pythagorovou v. $c^2 = a^2 + b^2$

$12{,}1^2 = 9^2 + b^2$

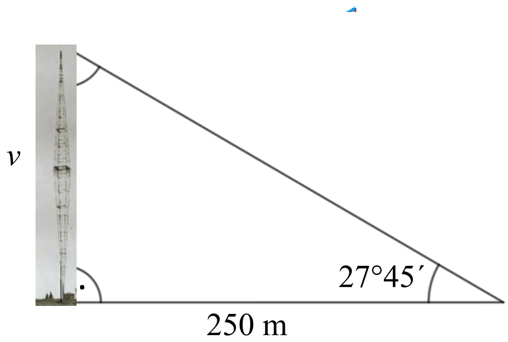
$b \doteq 8{,}1$ cm

$\gamma = 90°$ $\Rightarrow$ $\beta = 180° - (48° + 90°)$ ← Součet vnitřních úhlů Δ je 180°

$\beta = 42°$

<u>Příklad 5</u>: Ze vzdálenosti 250 m je vrchol televizního vysílače vidět pod úhlem 27° 45´. Určete výšku vysílače. (Obr. 8. 27)

Řešení:



Obr. 8. 27 Televizní vysílač

Známe úhel α a odvěsnu přilehlou k tomuto úhlu. Chceme vypočítat protilehlou odvěsnu ⇒ k výpočtu použijeme funkci tangens

$\text{tg}\ \alpha = \frac{v}{d}$

$\text{tg}\ 27°\ 45' = \frac{v}{250}$

$v = 250 \cdot \text{tg}\ 27°\ 45'$

$v \doteq 131{,}5$ m [84]

Televizní vysílač je vysoký přibližně 131,5 metry.

Goniometrické funkce jsou pro výpočty velmi důležité. Jejich využití je však značně omezeno faktem, že je k výpočtům můžeme použít pouze v pravoúhlém trojúhelníku. Z toho důvodu je nezbytné přidat prostředek, který nám umožní provádět výpočty velikostí vnitřních úhlů a délek stran v obecných trojúhelnících, ne jen v pravoúhlých.

[84] Vysílač. In: *Prostor-ad.cz* [online]. 2008 [vid. 2019-06-13]. Dostupné z: https://www.prostor-ad.cz/pruvodce/pvychod/cbrod/vysilac.htm#A

8. 4. Sinová věta

V každém trojúhelníku se stranami *a, b,* c a vnitřními úhly α, β, γ platí:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r,$$

kde *r* je poloměr kružnice opsané danému trojúhelníku.

Sinovou větu tedy můžeme použít, pokud známe dva vnitřní úhly trojúhelníku a stranu proti jednomu z nich, nebo známe-li dvě strany a úhel proti jedné ze stran.

Z právě uvedeného vztahu je patrné, že díky poměrům stran a sinům příslušných úhlů dokážeme vypočítat také poloměr kružnice opsané danému trojúhelníku.

Sinová věta je tedy velmi užitečným prostředkem při řešení prvků trojúhelníku. Při jejím použití však musíme dát pozor. Pokud máme zadány velikosti dvou vnitřních úhlů a délku jedné strany trojúhelníku, není s řešením žádný problém. Potíže ale mohou nastat v případě, že máme zadanou velikost pouze jednoho vnitřního úhlu a k tomu délky dvou stran, které tento úhel nesvírají. V takovém případě musíme ještě předtím, než se pustíme do samotného řešení, udělat kontrolu, kolik trojúhelníků s danými prvky může existovat.

Tupý úhel

Pokud je strana protilehlá k danému tupému úhlu větší než druhá strana, existuje pouze jeden trojúhelník, tzn. úloha má jediné řešení

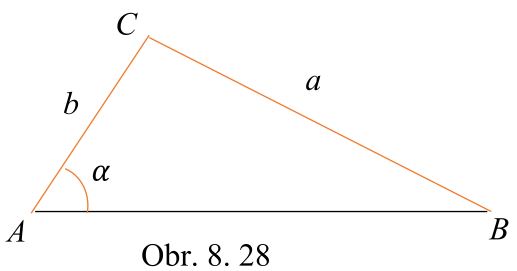
Např.: $\alpha = 105°$, $a = 12$ cm, $b = 9$ cm

$a > b \Rightarrow$ 1 řešení

Pokud je strana protilehlá k danému tupému úhlu kratší nebo rovna délce druhé strany, trojúhelník neexistuje, tzn. úloha nemá řešení (znamenalo by to totiž, že daný trojúhelník by musel mít dva tupé úhly, což není možné).

Ostrý úhel

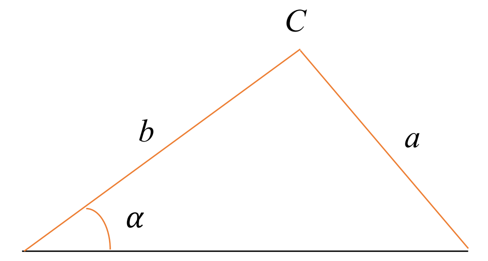
Pokud je strana protilehlá k danému úhlu větší než druhá strana (Obr. 8. 28), existuje jedno řešení.



Obr. 8. 28

$a > b \Rightarrow$ 1 řešení

Pokud je ale délka protilehlé strany k danému ostrému úhlu menší, nebo rovna délce druhé strany (Obr. 8. 29), musíme testovat (předpokládejme, že strana *b* je přilehlá strana k danému úhlu a strana *a* je strana protilehlá):

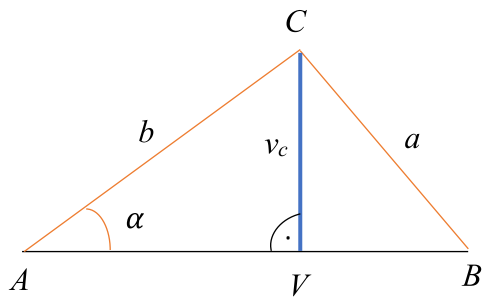


Obr. 8. 29

Posuzujeme počet možných trojúhelníků při řešení sinové věty. Vyjádříme tedy funkci sinus tak, jak již zde byla definována (s využitím pravoúhlého trojúhelníku)

$$\sin\alpha = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}}$$

Zatím však žádný pravoúhlý trojúhelník nemáme. Stačí ale v našem trojúhelníku doplnit výšku v_c. Výška je kolmá na stranu AB. Rozdělí nám daný trojúhelník na dva pravoúhlé. Pro naše potřeby je důležitý trojúhelník AVC. (Obr. 8. 30). V tomto trojúhelníku již můžeme uplatnit funci sinus. Přeponou je strana b, odvěsnou protilehlou k úhlu α je právě sestrojená výška v_c.



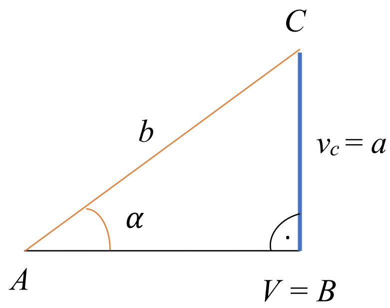
Obr. 8. 30

Vzhledem k funkci $\sin\alpha$ mohou nastat tři možnosti:

1) $\frac{a}{b} = \sin\alpha$

$$\sin\alpha = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{v_c}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{v_c}{b} \quad \Rightarrow \quad a = v_c$$

Tato možnost nastane pouze v případě, že trojúhelník ABC je pravoúhlý, s pravým úhlem při vrcholu B. (Obr. 8. 31).



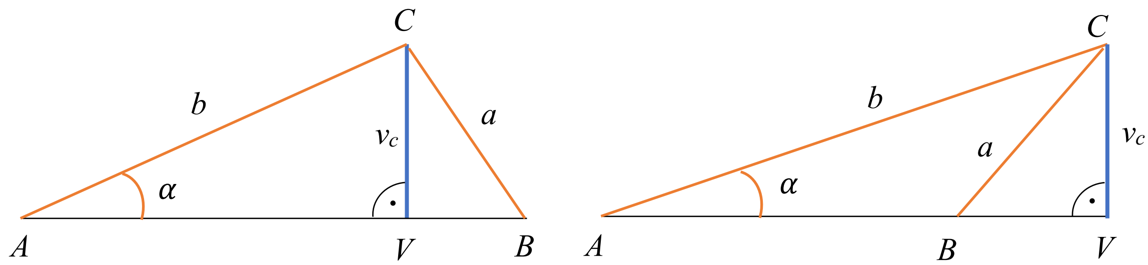
Obr. 8. 31

Úloha má tedy jediné řešení.

2) $\frac{a}{b} > \sin\alpha$

$\sin\alpha = \frac{v_c}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} > \frac{v_c}{b} \quad \Rightarrow \quad a > v_c \quad \wedge \quad b > a$

Existují dva trojúhelníky, které tyto podmínky splňují, tzn. úloha má dvě řešení. (Obr. 8. 32)



Obr. 8. 32

3) $\frac{a}{b} < \sin\alpha$

$\sin\alpha = \frac{v_c}{b} \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b} < \frac{v_c}{b} \quad \Rightarrow \quad a < v_c$

Takový trojúhelník neexistuje, tzn. úloha nemá řešení. [85]

Příklad 1: Vypočítejte délku strany c a vnitřní úhly β, γ trojúhelníku ABC, je-li dáno:

$a = 9$ cm, $\alpha = 105°$, $\beta = 48°$.

Řešení: Máme zadány 2 úhly, tzn. nemusíme dělat test počtu řešení

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

$$\frac{9}{\sin 105°} = \frac{b}{\sin 48°}$$

[85] VOJÁČEK, Jakub. Goniometrie: Sínová a kosínová věta. *Goniometrie: Sínová a kosínová věta* [online]. Praha: Maths.cz, 2008, 6.12.2008 [cit. 2019-07-02]. Dostupné z: https://maths.cz/clanky/86-sinova-a-kosinova-veta

$$b = \frac{9 \cdot \sin 48°}{\sin 105°}$$

$$b \doteq 6,9 \text{ cm}$$

Příklad 2: Určete velikosti vnitřních úhlů β, γ a délku strany c trojúhelníku ABC, je-li dáno: α = 52°, a = 12 cm, b = 14 cm.

Řešení: Máme zadán pouze jeden úhel, tzn. musíme provést kontrolu, kolik bude mít úloha řešení.

Zadaný úhel α je ostrý $\Rightarrow \frac{a}{b}$? $\sin \alpha$

$\frac{a}{b} = \frac{12}{14} = 0,8571$ $\qquad$ $\sin 52° = 0,788$

$\frac{a}{b} > \sin \alpha$ má 2 řešení

1. řešení: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$

$$\frac{12}{\sin 52°} = \frac{14}{\sin \beta}$$

$$\sin \beta = \frac{14 \cdot \sin 52°}{12}$$

$$\beta_1 \doteq 67°$$

Abychom mohli dopočítat stranu c, musíme nejprve určit velikost úhlu γ

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$$

$$\gamma = 180° - (52° + 67')$$

$$\gamma \doteq 61°$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\frac{12}{\sin 52°} = \frac{c}{\sin 61°}$$

$$c = \frac{12 \cdot \sin 61°}{\sin 52°}$$

$$c \doteq 13,3 \text{ cm}$$

Výsledky prvního řešení: $\Delta\, ABC$: $\quad$ α = 52° $\quad$ a = 12 cm
$\beta \doteq 67°$ $\quad$ b = 14 cm
$\gamma \doteq 61°$ $\quad$ $c \doteq 13,3$ cm

2. řešení: β_2 = 180° - β_1 = 113°

Délku strany c, dopočítáme zcela stejným postupem jako při předchozím řešení

$$\gamma \doteq 15°, c \doteq 3,9 \text{ cm}$$

Výsledky druhého řešení: $\Delta\, ABC$:	α = 52°	a = 12 cm
	$\beta \doteq$ 113°	b = 14 cm
	$\gamma \doteq$ 15°	$c \doteq$ 3,9 cm

8. 5. Kosinová věta

V každém trojúhelníku se stranami *a, b,* c a vnitřními úhly α, β, γ platí:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

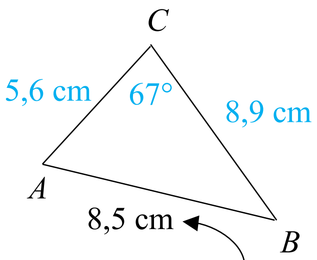
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Kosinovou větu využijeme v případě, že známe dvě strany a úhel jimi sevřený, nebo máme-li zadané všechny tři strany trojúhelníku. Pomocí kosinové věty pak dokážeme vypočítat zbývající stranu nebo libovolný vnitřní úhel trojúhelníku. [86]

<u>Příklad 1</u>: V trojúhelníku *ABC* je dán úhel γ = 67° a strany a = 8, 9 cm a b = 5, 6 cm. Vypočítejte délku strany c a úhly α, β. (Obr. 8. 33)

Řešení:



Obr. 8. 33

Známe dvě strany a úhel, který tyto strany svírají, tzn. použijeme kosinovou větu, pro stranu c

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

$$c^2 = 8,9^2 + 5,6^2 - 2 \cdot 8,9 \cdot 5,6 \cdot \cos 67°$$

$$c^2 = 79,21 + 31,36 - 38,95$$

$$c \doteq 8,5 \text{ cm}$$

Nyní potřebujeme vypočítat jeden z úhlů α, β. K tomu můžeme využít buď opět kosinovou větu pro stranu a nebo pro stranu b, případně výpočet provedeme pomocí sinové věty. V obou případech však musíme dostat stejný výsledek.

[86] VOJÁČEK, Jakub. Goniometrie: Sínová a kosínová věta. *Goniometrie: Sínová a kosínová věta* [online]. Praha: Maths.cz, 2008, 6.12.2008 [cit. 2019-07-02]. Dostupné z: https://maths.cz/clanky/86-sinova-a-kosinova-veta

Použiji kosinovou větu pro stranu b:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

$$5,6^2 = 8,9^2 + 8,5^2 - 2 \cdot 8,9 \cdot 8,5 \cdot \cos\beta$$

$$31,36 = 79,21 + 72,25 - 151,3 \cdot \cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{120,1}{151,3}$$

$$\beta \doteq 37°\ 30'$$

Nyní již zbývá jen dopočítat velikost úhlu α:

$$\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$$

$$\alpha \doteq 75°\ 30'$$

Výsledky řešení: $\Delta\, ABC$:	$\alpha \doteq 75°\ 30'$	$a = 8,9$ cm
	$\beta \doteq 37°\ 30'$	$b = 5,6$ cm
	$\gamma = 67°$	$c \doteq 8,5$ cm

9. Komplexní čísla

Chci-li podat ucelený přehled využití úhlů, nemohu opominout komplexní čísla.

Obor komplexních čísel vznikl z potřeby řešení rovnic, které by v oboru reálných čísel řešení neměla, nebo neměla příslušný počet kořenů, tj. tolik kořenů, jaký je stupeň rovnice.

Komplexní číslo a je uspořádaná dvojice reálných čísel (a_1, a_2), kde a_1 je reálná část komplexního čísla, a_2 je imaginární část komplexního čísla.

Možnosti zápisu komplexních čísel

1) uspořádaná dvojice (a_1, a_2)

2) algebraický tvar = symbolický zápis $a = a_1 + a_2 i$, kde i je imaginární jednotka, pro kterou platí:

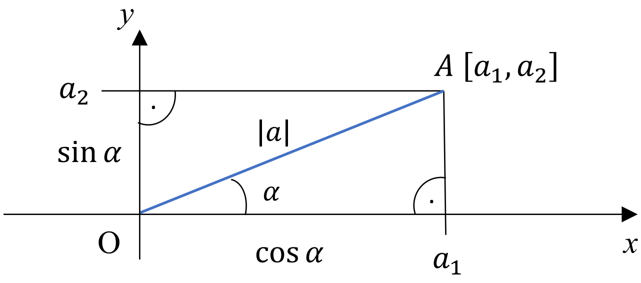
$$i^2 = -1$$

3) goniometrický tvar: $a = |a| \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha)$

Funkce sinus a kosinus jsou periodické, s periodou $2k\pi, k \in Z$ $(D(f) = R)$. Proto argument komplexního čísla v goniometrickém tvaru není jednoznačně určen. Pokud má komplexní číslo argument x, má současně také argument $x + 2k\pi$ (a naopak). Většinou používáme argument $x \in \langle 0; 2\pi)$. Argument může být vyjádřet v obloukové i stupňové míře $(x \in \langle 0°;\ 360°))$.

S komplexními čísly můžeme provádět běžné početní operace, tzn. sčítat, odčítat, násobit, dělit, umocňovat, zjišťovat jejich vzdálenost od počátku soustavy souřadnic (Gaussovy roviny). Popsané operace je možné provést jak s algebraickým, tak goniometrickým tvarem komplexních čísel. Vzhledem k tomu, že tématem této práce jsou úhly, zaměřím se především na goniometrický tvar (v algebraickém tvaru se úhel neobjevuje). Oba tvary můžeme převádět z jednoho do druhého, z algebraického do goniometrického a naopak.

Obrazem komplexního čísla $a = (a_1, a_2)$ je bod roviny $A\ [a_1, a_2]$ (Obr. 9. 1). Této rovině říkáme Gaussova rovina nebo rovina komplexních čísel.



Obr. 9. 1 Komplexní číslo v Gaussově rovině

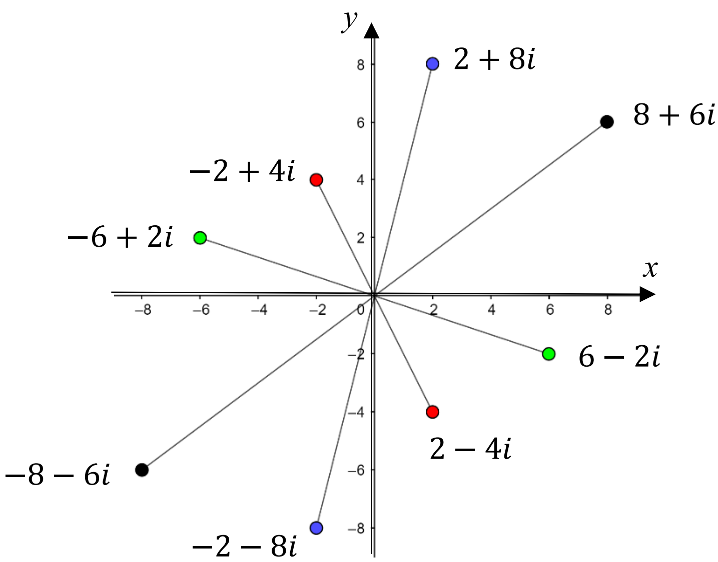
A - obraz komplexního čísla $a = a_1 + a_2 i$, $a \neq 0$
α – argument komplexního čísla a

Platí: $\cos\alpha = \dfrac{a_1}{|a|} \Rightarrow a_1 = |a| \cdot \cos\alpha$, $\sin\alpha = \dfrac{a_2}{|a|} \Rightarrow a_2 = |a| \cdot \sin\alpha$

x je reálná osa

y je imaginární osa

Ke každému komplexnímu číslu vždy existuje právě jedno komplexní číslo takové, že jsou tato komplexní čísla navzájem opačná. (Obr. 9. 2)

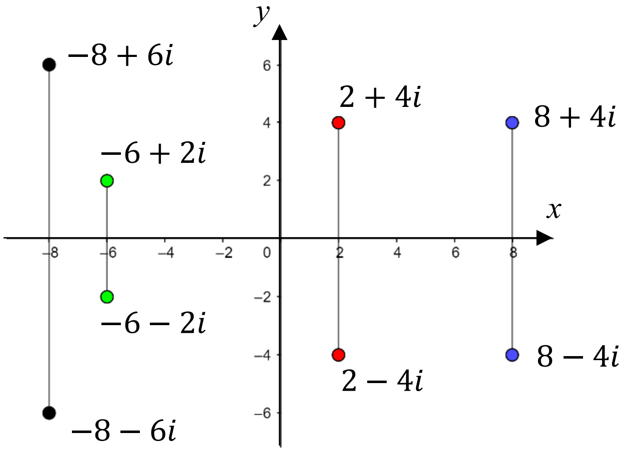


Obr. 9. 2 Navzájem opačná komplexní čísla

Dvojice navzájem opačných komplexních čísel je středově souměrná podle bodu $O[0,0]$. Je-li komplexní číslo ve tvaru $a = a_1 + a_2 i$, pak číslo k němu opačné komplexní číslo je ve tvaru $-a = -a_1 - a_2 i$.

např. $a = 2 - 4i \quad \Rightarrow \quad -a = -2 + 4i = -(2 - 4i)$

Ke každému komplexnímu číslu vždy existuje právě jedno komplexní číslo takové, že jsou tato komplexní čísla navzájem komplexně sdružená. (Obr. 9. 3)

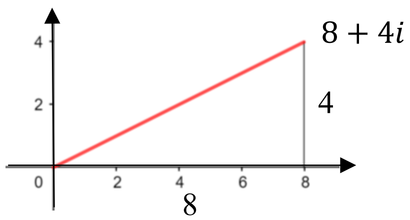


Obr. 9. 3 Komplexně sdružená čísla

Dvojice navzájem komplexně sdružených komplexních čísel je osově souměrná podle osy *x*. Je-li komplexní číslo ve tvaru $a = a_1 + a_2 i$, pak číslo k němu komplexně sdružené je ve tvaru $\bar{a} = a_1 - a_2 i$.

např. $a = 2 - 4i \quad \Rightarrow \quad \bar{a} = 2 + 4i$

U každého kompexního čísla je možné určit jeho velikost = vzdálenost tohoto čísla od bodu $O[0,0]$ v Gaussově rovině, $|a|$. (Obr. 9. 4)



Obr. 9. 4 Absolutní hodnota komplexního čísla

K výpočtu můžeme použít Pythagorovu větu, chceme vypočítat délku přepony:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 8^2 + 4^2$$

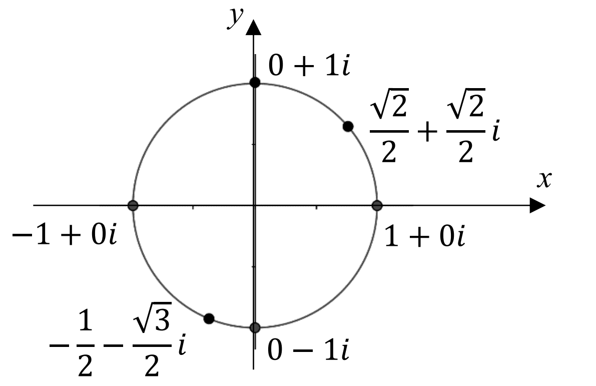
$$c = 4\sqrt{5}$$

$$|a| = 4\sqrt{5}$$

Velikost komplexního čísla *a* (absolutní hodnotu) je nezáporné reálné číslo:

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Je-li velikost komplexního čísla rovna 1, nazýváme toto číslo komplexní jednotkou (číslo leží na jednotkové kružnici). (Obr. 9. 5)

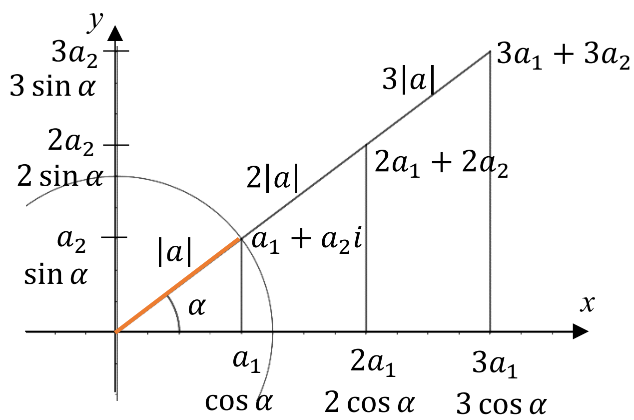


Obr. 9. 5 Komplexní jednotka

$$a = a_1 + a_2 i = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

$$|a| = 1$$

Není-li komplexní číslo komplexní jednotkou, je násobkem komplexního čísla, které je komplexní jednotkou (na základě podobnosti trojúhelníků). (Obr. 9. 6)



Obr. 9. 6 Násobek komplexního čísla (dvojnásobek, trojnásobek)

$$a = a_1 + a_2 i = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

$$2a = 2a_1 + 2a_2 = 2\cos\alpha + 2i\sin\alpha = 2(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 2(a_1 + a_2 i)$$
$$3a = 3a_1 + 3a_2 i = 3\cos\alpha + 3i\sin\alpha = 3(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 3(a_1 + a_2 i)$$

Sčítání komplexních čísel

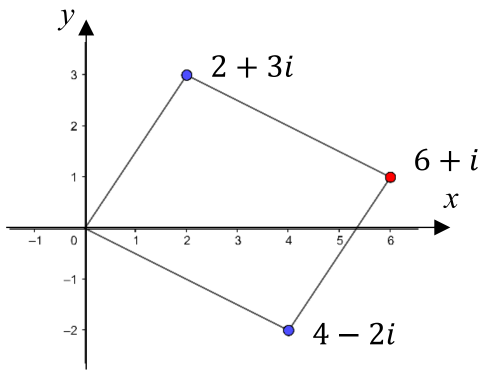
Komplexní čísla $a = a_1 + a_2 i, b = b_1 + b_2 i$ v algebraickém tvaru sčítáme tak, že sečteme zvlášť reálné složky a zvlášť imaginární složky daných komplexních čísel.

$$a + b = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i$$

Např. $a = 2 + 3i \qquad b = 4 - 2i$

$$a + b = 2 + 3i + 4 - 2i = 6 + i$$

Daná komplexní čísla je možné sčítat i graficky. (Obr. 9. 7) Sestrojíme obrazy daných komplexních čísel v Gaussově rovině. U obou čísel znázorníme jejich absolutní hodnotu (vzdálenost od bodu $O[0; 0]$). Útvar doplníme na rovnoběžník. Vzniklý bod (čtvrtý vrchol rovnoběžníku) je obrazem komplexního čísla, které se součtem daných komplexních čísel. Výsledné číslo je, samozřejmě, stejné jako při numerickém sčítání.



Obr. 9. 7 Sčítání komplexních čísel

Odčítání komplexních čísel

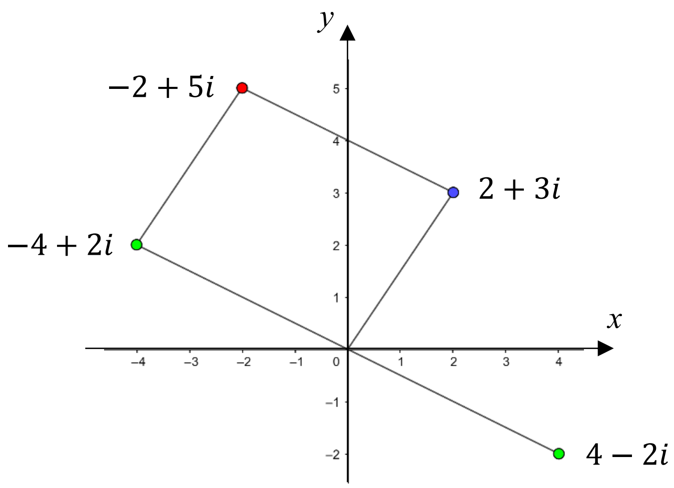
Komplexní čísla $a = a_1 + a_2 i, b = b_1 + b_2 i$ v algebraickém tvaru odečteme tak, že k prvnímu komplexnímu číslu přičteme číslo opačné k druhému komplexnímu číslu.

$$a - b = a + (-b) = a_1 + a_2 i - (b_1 + b_2 i) = a_1 + a_2 i - b_1 - b_2 i$$

Např. $a = 2 + 3i \qquad b = 4 - 2i$

$$a - b = 2 + 3i + [-(4 - 2i)] = 2 + 3i - (4 - 2i) = 2 + 3i - 4 + 2i = -2 + 5i$$

Postup při grafickém odčítání komplexních čísel je prakticky stejný jako při sčítání. Jen s tím rozdílem, že musíme nejprve sestrojit obraz čísla opačného k tomu, které máme odečíst. (Obr. 9. 8)



Obr. 9. 8 Odčítání komplexních čísel

Příklad 1: Zapište komplexní číslo $a = 5\sqrt{3} + 5i$ v goniometrickém tvaru

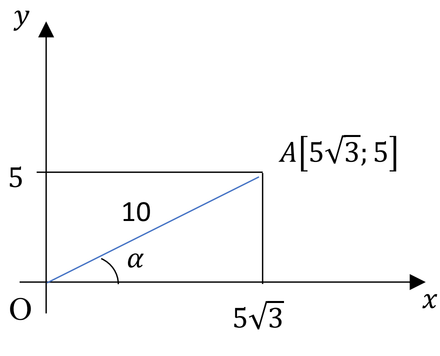
Nejprve potřebuje zjistit $|a|$ tzn. vzdálenost čísla od počátku Gaussovy roviny

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \qquad \Rightarrow \qquad |a| = \sqrt{\left(5\sqrt{3}\right)^2 + 5^2}$$

$$|a| = \sqrt{75 + 25}$$

$$|a| = 10$$

Nyní potřebujeme zjistit příslušný úhel α. Aby bylo jasné, co vlastně budeme počítat, znázorním nejprve komplexní číslo v Gaussově rovině. (Obr. 9. 9)



Obr. 9. 9 Komplexní číslo $5\sqrt{3} + 5$

$$\left.\begin{array}{lll} \cos\alpha = \dfrac{a_1}{|a|} & \Rightarrow & \cos\alpha = \dfrac{5\sqrt{3}}{10} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{a_2}{|a|} & \Rightarrow & \sin\alpha = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \alpha = 30° = \frac{\pi}{6}$$

Nyní už jen zjištěné údaje dosadíme do goniometrického tvaru komplexního čísla:

$$a = |a| \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$a = 10 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 10 \cdot (\cos 30° + i\sin 30°)$$

<u>Příklad 2</u>: Zapište komplexní $a = \frac{2}{5}\,(\cos 330° + i\sin 330°)$ číslo v algebraickém tvaru

Tento přechod je jednodušší – stačí určit cos 330°, sin 330° a vynásobit

$$a = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{1}{5}i$$

<u>Násobení komplexních čísel</u>

Pokud chceme násobit komplexní čísla v algebraickém tvaru, stačí pouze roznásobit závorku závorkou.

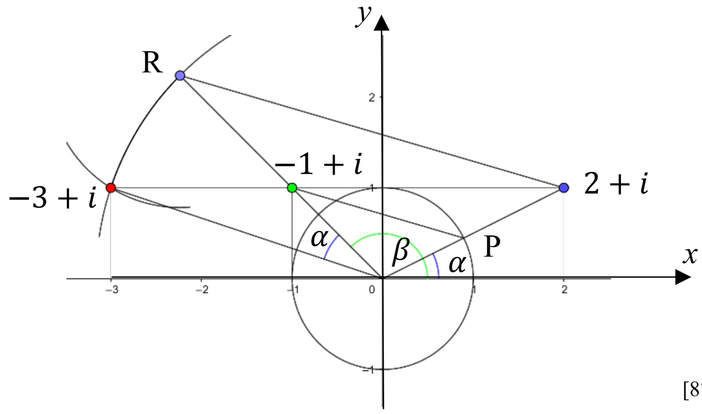
<u>Příklad 1</u>: Vynásobte komplexní čísla $a = (3 + 2i)$, $b = (1 - 3i)$ $(i^2) = -1$

$$a \cdot b = (3 + 2i) \cdot (1 - 3i) = 3 - 9i + 2i - 6i^2 = 3 - 7i - 6\,(-1) = 3 - 7i + 6 = 9 - 7i$$

Komplexní čísla je možné násobit i graficky. (Obr. 9. 10). Na obrázku je znázorněn postup grafického násobení komplexních čísel $a = 2 + i$, $b = -1 - i$.

Pro násobení komplexních čísel v goniometrickém tvaru $a = |a| \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $b = |b| \cdot (\cos\beta + i\sin\beta)$ použijeme vzoreček:

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot [\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)]$$



[87]

Obr. 9. 10 Grafické násobení komplexních čísel

Při grafickém řešení najdeme nejprve bod P (průsečík vektoru čísla a s jednotkovou kružnicí). Pomocí podobnosti trojúhelníků najdeme bod R. Ten pak otočíme podle počátku Gaussovy roviny ($O[0; 0]$) o úhel α.

Výsledkem je bod = komplexní číslo $-3 + i$. Správnost jsme ověřili výpočtem.

Pro kontrolu daná čísla vynásobíme i numericky:

$$(2 + i)(-1 + i) = -2 + 2i - i + i^2 = -3 + i$$

<u>Příklad 2</u>: Určete součin komplexních čísel $a = \frac{3}{5} \cdot (\cos 210° + i \sin 210°)$,
$b = 6 \cdot (\cos 30° + i \sin 30°)$.

Po dosazení do vzorečku: $a \cdot b = \frac{3}{5} \cdot 6 \cdot [\cos (210° + 30°) + i \sin\ (210° + 30°)]$

$$a \cdot\ b = \frac{18}{5} \cdot (\cos 240° + i \sin 240°)$$

V případě, že součet úhlů α, β v argumentu goniometrických funkcí vyjde větší nebo roven 360°, převedeme tento součet na úhel v základní velikosti.

<u>Dělení komplexních čísel</u>

Chceme-li dělit komplexní čísla v algebraickém tvaru, musíme zlomek rozšířit číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli, tzn.

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1 + a_2 i}{b_1 + b_2 i} = \frac{(a_1 + a_2 i)(b_1 - b_2 i)}{(b_1 + b_2 i)(b_1 - b_2 i)}$$

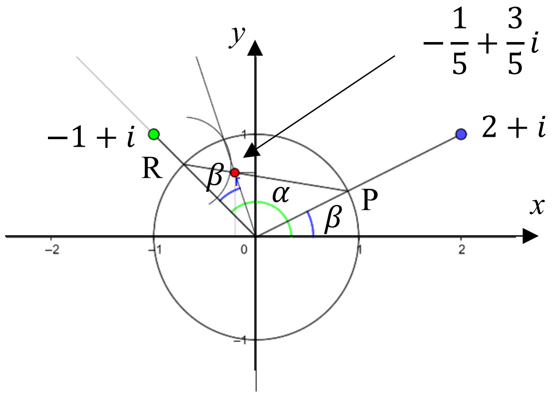
[87] KRYNICKÝ, Martin. Učebnice matematiky pro gymnázia: Komplexní čísla. *Učebnice matematiky pro gymnázia: Komplexní čísla* [online]. Strakonice: www.realisticky.cz, 2010, 13.7.2010 [cit. 2019-06-15]. Dostupné z: http://www.ucebnice.krynicky.cz/Matematika/06_Komplexni_cisla/2_Goniometricky_tvar_komplexnich_cisel/6206_Komplexni_cisla_jako_vektory_v_Gaussove_rovine.pdf

Pro dělení komplexních čísel v goniometrickém tvaru
$a = |a| \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $b = |b| \cdot (\cos\beta + i\sin\beta)$ použijeme vzoreček (podobný jako u součinu): $\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|} \cdot [\cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)]$

Komplexní čísla je možné garficky také dělit. (Obr. 9. 11). Na obrázku je znázorněn postup grafického dělení komplexních čísel $a = -1 + i$, $b = 2 - i$.

Pro kontrolu vydělíme daná komplexní čísla i numericky:

$$\frac{a}{b} = \frac{-1+i}{2+i} = \frac{(-1+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{-2+i+2i-i^2}{4-i^2} = \frac{-2+3i+1}{4+1} = \frac{-1+3i}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$



Obr. 9. 11 Grafické dělení komplexních čísel [88]

Při grafickém řešení najdeme nejprve body *P, R* (průsečíky vektorů čísel *a, b* s jednotkovou kružnicí). Obraz výsledného komplexního čísla bude průnikem úsečky *PR* s polopřímkou, která bude otočením polopřímky *OR* o úhel -α. [89]

Výsledkem je bod = komplexní číslo $-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$. Správnost jsme ověřili výpočtem.

<u>Příklad 1</u>: Určete podíl komplexních čísel $a = 2 \cdot (\cos 315° + i\sin 315°)$, $b = 4 \cdot (\cos 45° + i\sin 45°)$

Po dosazení do vzorečku: $\frac{a}{b} = \frac{2}{4} \cdot [\cos(315° - 45°) + i\sin(315° - 45°)]$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{2} \cdot (\cos 270° + i\sin 270°)$$

[88] KRYNICKÝ, Martin. Učebnice matematiky pro gymnázia: Komplexní čísla. *Učebnice matematiky pro gymnázia: Komplexní čísla* [online]. Strakonice: www.realisticky.cz, 2010, 13.7.2010 [cit. 2019-06-15]. Dostupné z: http://www.ucebnice.krynicky.cz/Matematika/06_Komplexni_cisla/2_Goniometricky_tvar_komplexnich_cisel/6206_Komplexni_cisla_jako_vektory_v_Gaussove_rovine.pdf

[89] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 9., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN isbn:978-80-7196-356-1, str. 102-111

V případě, že rozdíl úhlů α, β v argumentu goniometrických funkcí vyjde větší nebo roven 360°, převedeme tento součet na úhel v základní velikosti. Může také nastat situace, že rozdíl úhlů vyjde v záporné velikosti. V tom případě tento úhel převedeme opět do základní velikosti.

Umocňování komplexních čísel

Umocňování komplexních čísel znamená totéž jako násobení téhož komplexního čísla opakovaně mezi sebou.

Např. a^2, kde $a = 3(\cos 30° + i \sin 30°)$

$$a^2 = 3(\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot 3(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$a^2 = 3^2(\cos(\alpha+\alpha) + i\sin(\alpha+\alpha)) = 3^2(\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha))$$

Stejným způsobem bychom mohli pokračovat i pro mocniny vyššího řádu. I z této mocniny je ale patrné, jakým způsobem se komplexní čísla v goniometrickém tvaru umocňují.

Pro umocnění komplexního čísla v goniometrickém tvaru $a = |a| \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $a \neq 0$, použijeme vzoreček :

$$a^n = |a|^n \cdot (\cos n\,\alpha + i\sin n\,\alpha),\ n \in N \text{ ….. Moivreova věta}$$

Příklad 1: Pomocí Moivreovy vypočtěte a^6, je-li $a = -2 - 2i$

Moivreova věta je formulována pro komplexní číslo v goniometrickém tvaru. Proto musíme dané komplexní číslo nejprve převést z algebraického do goniometrického tvaru.

$$|a| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{a_1}{|a|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha &= \frac{a_2}{|a|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \quad \alpha = 225° = \frac{5}{4}\pi$$

$$a = 2\sqrt{2} \cdot (\cos 225° + i\sin 225°)$$

Nyní už můžeme použít Moivreovu větu:

$$a^6 = \left(2\sqrt{2}\right)^6 \cdot (\cos(6 \cdot 225°) + i\sin(6 \cdot 225°))$$

$$a^6 = 512 \cdot (\cos 1350° + i\sin 1350°)$$

$$a^6 = 512 \cdot (\cos 270° + i\sin 270°)$$

Binomická rovnice

Při výčtu oblastí, ve kterých se využívá úhlů, nemohu opomenout zmínit binomické rovnice. Tyto rovnice mají řešení v oboru komplexních čísel. Znázornit je proto můžeme v Gaussově rovině.

Jedná se o rovnice typu $x^n = a$, kde a je komplexní číslo a n je přirozené číslo. Pokud a zapíšeme v goniometrickém tvaru:

$a = |a| \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)$, tzn. $x^n = |a| \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Pak má tato rovnice v oboru komplexních čísel právě n různých kořenů, a to:

$x_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot \left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$, kde $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, n je přir. číslo

Příklad 1: V oboru komplexních čísel řešte rovnici $x^4 = -81$.

Nejprve si musíme číslo – 81 (komplexní číslo v algebraickém tvaru) vyjádřit v goniometrickém tvaru.

$a = -81 \quad \Rightarrow \quad |a| = \sqrt{(-81)^2 + 0^2} = \sqrt{81^2} = 81$

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{a_1}{|a|} = \frac{-81}{81} = -1\\ \sin\alpha &= \frac{a_2}{|a|} = \frac{0}{81} = 0\end{aligned}\right\} \quad \alpha = 180° = \pi \qquad a = 81 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)$$

Nyní budeme dosazovat do vzorce $x_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot \left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$,
pro $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

$x_k = \sqrt[4]{81} \cdot \left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$x_0 = 3 \cdot \left(\cos\frac{\pi + 2\cdot 0\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\cdot 0\pi}{4}\right) = 3 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$x_0 = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\,i$

$x_1 = 3 \cdot \left(\cos\frac{\pi + 2\cdot 1\cdot\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\cdot 1\cdot\pi}{4}\right) = 3 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$x_1 = 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\,i$

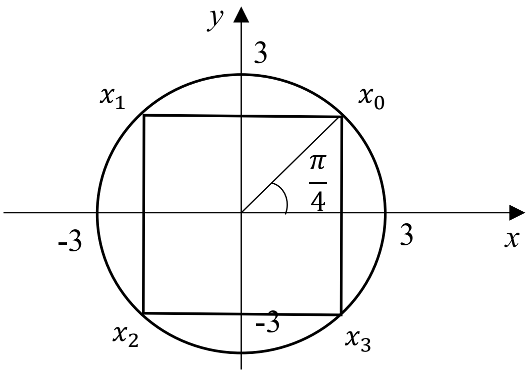
$$x_2 = 3 \cdot \left(\cos\frac{\pi + 2\cdot 2\cdot\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\cdot 2\cdot\pi}{4}\right) = 3 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$x_2 = 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$x_3 = 3 \cdot \left(\cos\frac{\pi + 2\cdot 3\cdot\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\cdot 2\cdot\pi}{4}\right) = 3 \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) =$$

$$x_3 = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Grafické znázornění kořenů – Gaussova rovina (Obr. 9. 12)



[90]

Obr. 9. 12 Znázornění výsledků rovnice v Gaussově rovině

10. Úlohy na procvičení

Úlohy v této sbírce jsou v podstatě rozděleny do dvou částí. V první jsou příklady určené především pro žáky základních škol 10.1-10.4. Jedná se o úlohy z kapitol Vlastnosti úhlů a Početní operace s úhly. Tyto příklady splňují nároky úloh k přijímacím zkouškám na střední školy.

Ve druhé části jsou úlohy určené pro studenty středních škol. Zde se jedná o úlohy z kapitol Úhly příslušné k obvodu kružnice, Goniometrie a Komplexní čísla. Jde o úlohy 10.5.-10.7. Tyto příklady splňují nároky úloh maturitních maturitních testů.

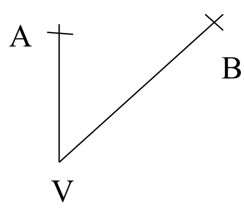
Úlohy v obou částech jsou řazeny od jednodušších po náročnější.

[90] HUDCOVÁ, Milada a Libuše KUBIČÍKOVÁ. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ, SOU a nástavbové studium*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 2005. ISBN 80-7196-318-6, str. 178-192.

10. 1. Zápis úhlu

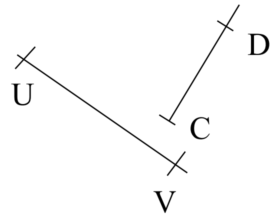
Příklad 1: Rozhodněte, které z polopřímek vymezují úhel. Zdůvodněte, proč. (Obr. 11. 1–11. 5)

a)



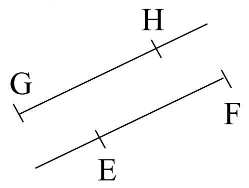
Obr. 11. 1

b)



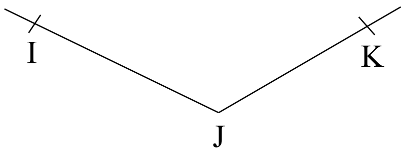
Obr. 11. 2

c)



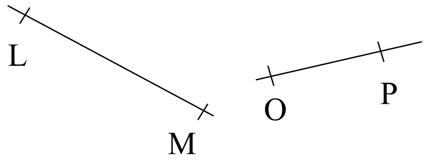
Obr. 11. 3

d)



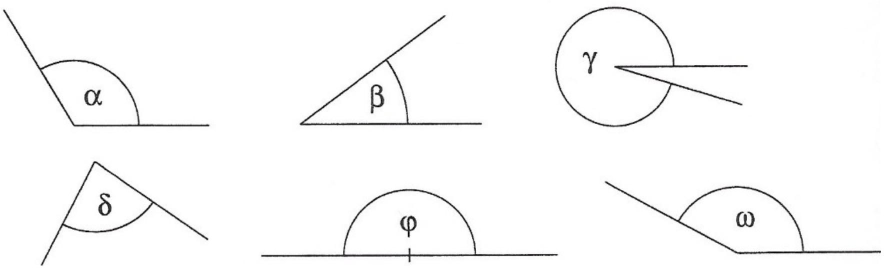
Obr. 11. 4

e)



Obr. 11. 5

Příklad 2: Rozhodněte, které z úhlů jsou konvexní a nekonvexní, ostré, tupé, pravé, přímé. (Obr. 11. 6)



[91]

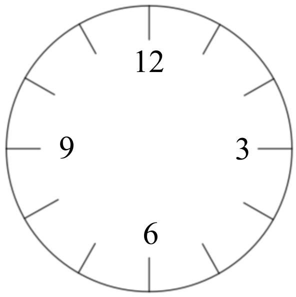
Obr. 11. 6

Příklad 3: Určete velikosti konvexních úhlů, které svírají hodinové ručičky, pokud ukazují čas: (Obr. 11. 7)

a) 6:00 b) 3:00 c) 8:00

---

[91] MOLNÁR, Josef. *Matematika 6: [učebnice pro základní školy]*. Olomouc: Prodos, 1998. ISBN 80-85806-98-3, str.66



Obr. 11. 7

Příklad 4: Bez použití úhloměru (trojúhelníku s ryskou) sestrojte úhly o velikosti:

a) 135° b) 105° c) 120° d) 75°

Příklad 5: Jana viděla rozhlednu pod úhlem 40°. Martina viděla stejnou rozhlednu pod úhlem 34°. Která z dívek byla k rozhledně blíže? Načrtněte si obrázek.

10. 2. Operace s úhly

Příklad 1: Převeďte velikost úhlu na stupně a minuty:

a) 158´ b) 328´ c) 421´ d) 555´

Příklad 2: Převeďte velikost úhlu na minuty:

a) 3° 15´ b) 2° 07´ c) 5° 12´ e) 7° 77´

Příklad 3: Převeďte velikost úhlu na stupně a minuty:

a) 2,5° b) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{\circ}$ c) 3,75° d) $\left(3\frac{3}{5}\right)^{\circ}$

e) 12,4° f) 23,7° g) 21.3° 31,25°

Příklad 4: Doplňte mezi velikosti úhlů znak $<, =, >$ tak, aby byl zápis pravdivý.

a) 92° 5600´ b) 380´ 6°20´ c) 3°30´ 330´

Příklad 5: Vypočítejte:

a) 3° 15´+ 7° 22´ b) 42° 33´+57° 59´ c) 87° 55´+73° 44´

d) 22° 54´+ 17° 34´ e) 98° 32´+ 49° 52´ f) 156° 17´+ 79° 58´

Příklad 6: Vypočítejte

a) $15° \cdot 3$ b) $15°23' \cdot 3$

$23° \cdot 4$ $24°34' \cdot 4$

$28° \cdot 5$ $36°27' \cdot 5$

$24° \cdot 6$ $29°42' \cdot 6$

Příklad 7: Vypočítejte

a) $74°\ 55' - 27°\ 42'$ b) $159°\ 22' - 76°\ 15'$ c) $174°\ 36' - 96°\ 29'$

d) $85°\ 15' - 47°\ 32'$ e) $92°\ 29' - 54°\ 55'$ e) $122°\ 47' - 98°\ 56'$

Příklad 8: Vypočítejte

a) $124°\ 36'$: 4 b) $126°$: 5

$115°\ 35'$: 5 $83°$: 5

$96°\ 54'$: 6 $85°\ 03'$: 7

$123°\ 12'$: 3 $50°\ 24'$: 4

Příklad 9: Vypočítejte velikost úhlu α, jestliže platí:

a) $\alpha + 43°\ 15' = 97°$ b) $76°\ 39' - \alpha = 25°\ 32'$

10. 3. Grafické operace s úhly

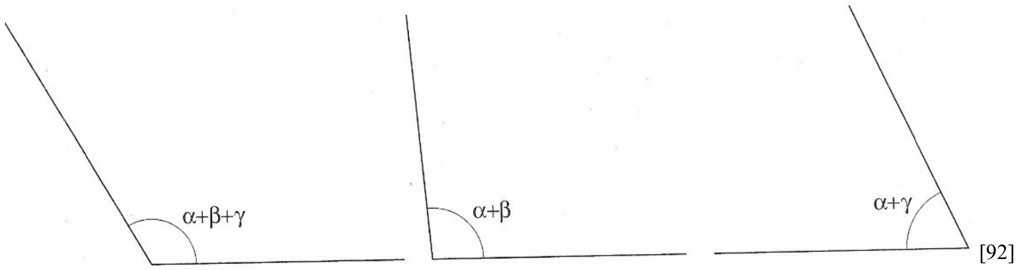
Příklad 1: Sestrojte úhly $\alpha = 48°, \beta = 69°$. Dané úhly graficky sečtěte. Proveďte zkoušku výpočtem. Rozhodněte, o jaký úhel (podle velikosti) se jedná.

Příklad 2: Sestrojte úhly $\gamma = 56°, \delta = 132°$. Graficky určete $\delta - \gamma$. Proveďte zkoušku výpočtem. Rozhodněte, o jaký úhel (podle velikosti) se jedná.

Příklad 3: Sestrojte úhly $\alpha = 37°, \beta = 72°, \gamma = 83°$. Graficky určete $\alpha + \gamma - \beta$. Proveďte zkoušku výpočtem. Rozhodněte, o jaký úhel (podle velikosti) se jedná.

Příklad 4: Sestrojte úhly $\alpha = 44°, \beta = 81°, \gamma = 35°$. Graficky určete $\alpha + \beta - \gamma$. Proveďte zkoušku výpočtem. Rozhodněte, o jaký úhel (podle velikosti) se jedná.

Příklad 5: Graficky určete velikost úhlu α (Obr. 11. 8)



Obr. 11. 8

Příklad 6: Graficky určete velikost úhlu $\gamma = 2\alpha - \beta$, je-li: $\alpha = 36°$, $\beta = 54°$. Výsledek ověřte početně. Doplňte tvrzení: Výsledný úhel je ……….

(ostrý, pravý, tupý, přímý)

Příklad 7: Graficky určete velikost úhlu $\gamma = \alpha + \frac{\beta}{2}$, je-li: $\alpha = 62°$, $\beta = 74°$. Výsledek ověřte početně. Doplňte tvrzení: Výsledný úhel je ……….

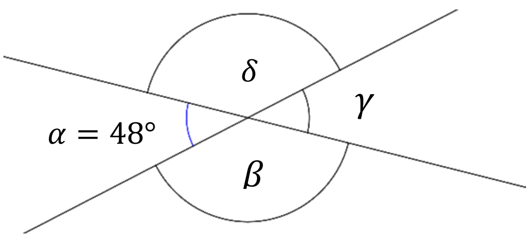
(ostrý, pravý, tupý, přímý)

10. 4. Dvojice úhlů

Příklad 1: Rozhodněte o pravdivosti tvrzení.

a) Sečtením tří ostrých úhlů lze získat přímý úhel	ANO	NE
b) V trojúhelníku mohou být tři shodné vnitřní úhly	ANO	NE
c) Rozdíl tupého a ostrého úhlu je vždy ostrý úhel	ANO	NE
d) Součet vrcholových úhlů je vždy 180°	ANO	NE
e) Součet vedlejších úhlů je tupý úhel	ANO	NE
f) Pravý úhel je konvexní	ANO	NE

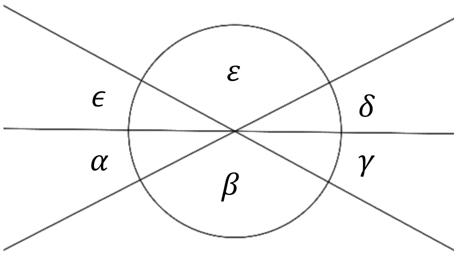
Příklad 2: Určete velikosti všech vyznačených úhlů. (Obr. 11. 9)



Obr. 11. 9

[92] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Pracovní sešit z matematiky: soubor úloh pro 6. ročník základní školy*. 4., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2011. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-71964-22-3, str. 20

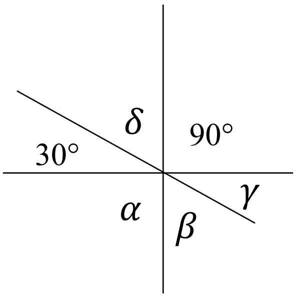
Příklad 3: Určete velikost všech úhlů – je-li dáno: $\beta = 3\gamma,\ \beta + \gamma = 4\alpha$ (Obr. 11. 10)



Obr. 11. 10

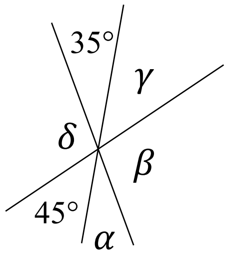
Příklad 4: Určete velikosti všech úhlů: (Obr. 11. 11), (Obr. 11. 12), (Obr. 11. 13)

a)



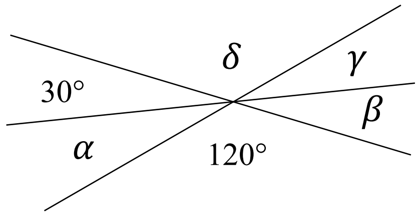
Obr. 11. 11

b)



Obr. 11. 12

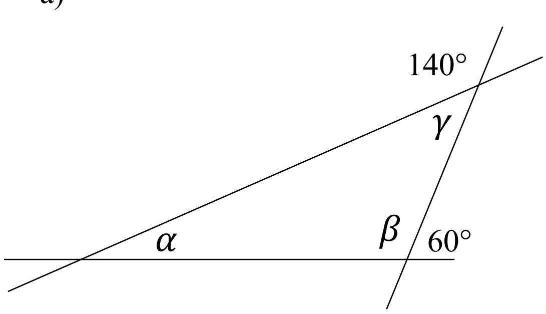
c)



Obr. 11. 13

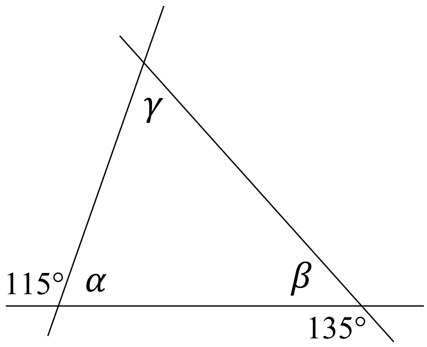
Příklad 5: Určete velikosti všech vnitřních úhlů trojúhelníku (součet vnitřních úhlů trojúhelníku je vždy 180°): (Obr. 11. 14), (Obr. 11. 15)

a)



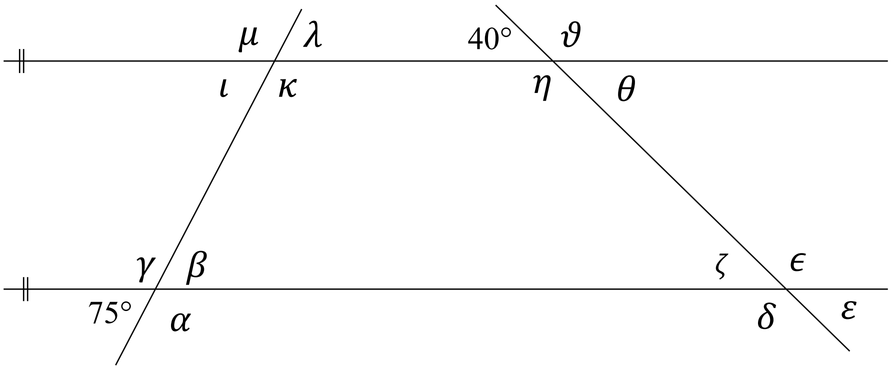
Obr. 11. 14

b)



Obr. 11. 15

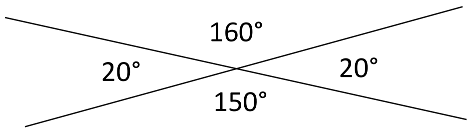
Příklad 6: Určete velikosti všech vyznačených úhlů: (Obr. 11. 16)



Obr. 11. 16

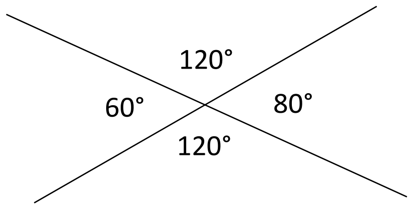
Příklad 7: Najděte chyby a opravte je. (Obr. 11. 17), (Obr. 11. 18)

a)



Obr. 11. 17

b)

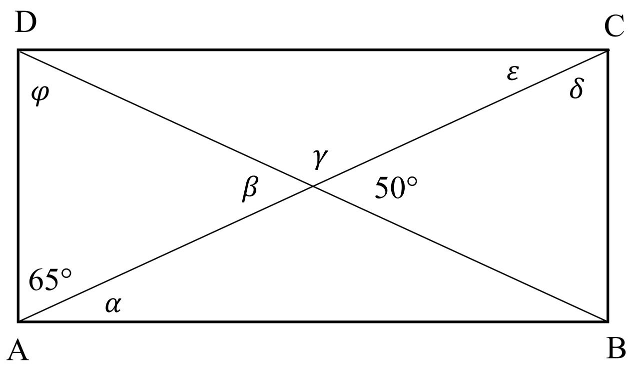


Obr. 11. 18

Příklad 8: Jeden ze dvou vedlejších úhlů je třikrát menší než druhý. Určete velikost obou úhlů.

Příklad 9: Součet dvou vrcholových úhlů je 144°. Určete velikost obou úhlů.

Příklad 10: Napište velikosti všech úhlů vyznačených v obdélníku $ABCD$. (Obr. 11. 19)

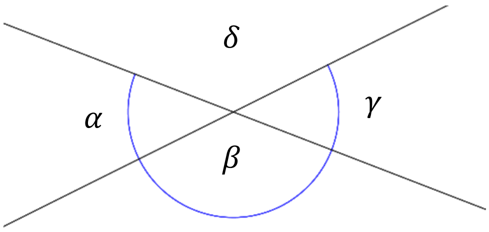


Obr. 11. 19

Příklad 11: Jeden z vedlejších úhlů je o 35° větší než druhý. Určete velikosti obou úhlů.

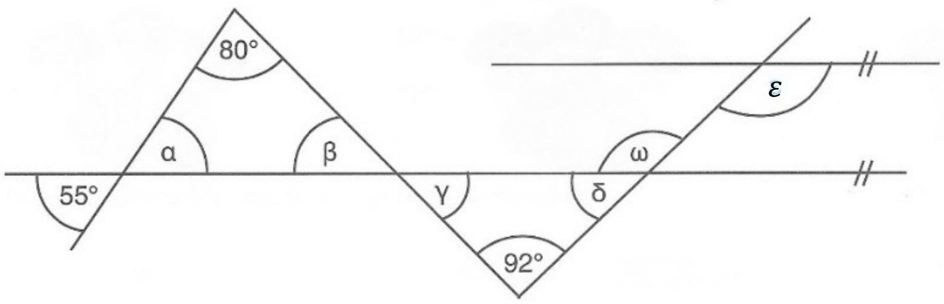
Příklad 12: Dokažte, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180°.

Příklad 13: Součet tří ze čtyř vyobrazených úhlů je 240°. Určete velikosti všech úhlů. (Obr. 11. 20)



Obr. 11. 20

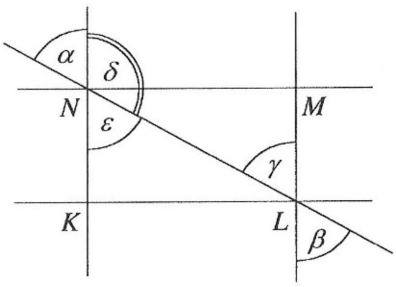
Příklad 14: Určete velikosti všech úhlů: (Obr. 11. 21)



[93]

Obr. 11. 21

Příklad 15: Na obrázku je obdélník $KLMN$. Doplňte názvy dvojic úhlů. (Obr. 11. 22)



[94]

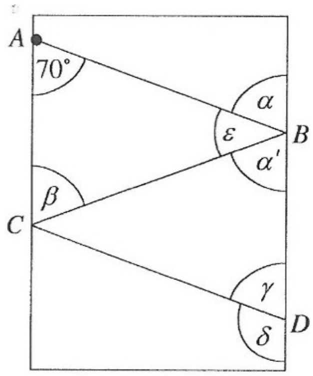
Obr. 11. 22

[93] HERMOCHOVÁ, Dana, Jana PRESOVÁ, Petr KAŠŠÁK, et al. *Hravá matematika 6: pracovní sešit pro 6. ročník ZŠ a víceletá gymnázia: v souladu s RVP ZV*. Praha: Taktik, 2014. ISBN 978-80-87881-18-7, str. 86.

[94] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Základní geometrické útvary: pracovní sešit z matematiky: [pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií]*. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-018-7, str. 43

α a γ jsou ………………………
γ a β jsou ………………………
β a ε jsou ………………………
δ a ε jsou ………………………
α a δ jsou ………………………
α a β jsou ………………………

Příklad 16: Kulečníková koule se odrazí od kraje kulečníkového stolu pod stejným úhlem, pod jakým dopadla (úhel odrazu se rovná úhlu dopadu). (Obr. 11. 23) Napište velikosti všech označených úhlů.



[95]

Obr. 11. 23

10. 5. Úhly příslušné k obvodu kružnice

Příklad 1: Vypočítejte velikost obvodového úhlu k oblouku, který má délku $\frac{5}{12}$ délky kružnice.

Příklad 2: Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku, který vznikne, pokud na ciferníku spojíme body označující čísla 2, 7, 10. [96]

Příklad 3: V tětivovém čtyřúhelníku *ABCD* (lze mu opsat kružnici) platí: α = 54°, β = 94°. Určete velikosti zbývajících vnitřních úhlů daného čtyřúhelníku.

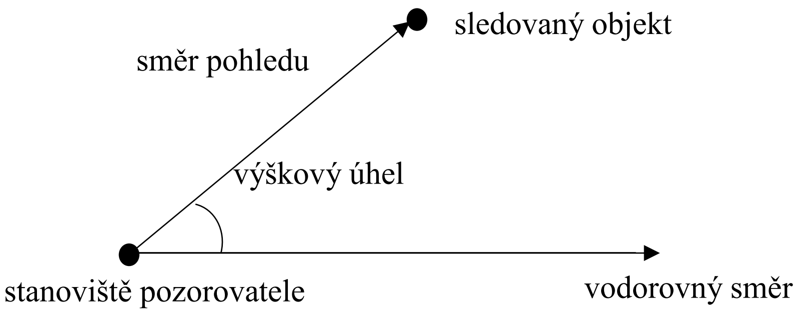
[95] ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Základní geometrické útvary: pracovní sešit z matematiky: [pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií]*. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-018-7, str. 44
[96] Ciferník hodin, trojúhelník. In: *Hackmath.cz* [online]. 2019 [cit. 2019-06-27]. Dostupné z: https://www.hackmath.net/cz/priklady?q=st%C5%99edov%C3%BD+a+obvodov%C3%BD+%C3%BAhel

10. 6. Goniometrie

V této krátké kapitole se objevuje několik nových pojmů. Aby nedošlo k nedorozumění v tom, co má čtenář počítat, považuji za prospěšné tyto pojmy přiblížit.

Výškový úhel

Pokud pozorovatel vidí sledovaný objekt nad sebou, jedná se o výškový úhel mezi vodorovnou linií a linií jeho pohledu na objekt. (11. 24)

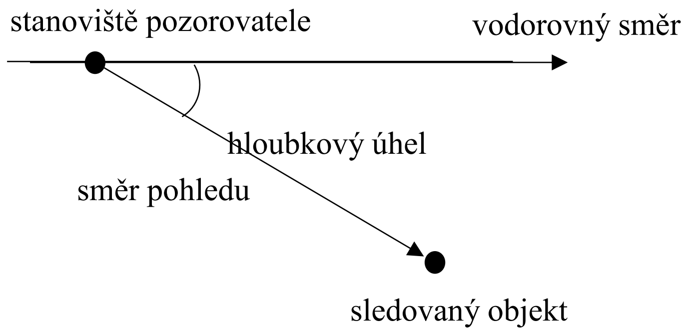


[97]

Obr. 11. 24 Výškový úhel

Hloubkový úhel

S hloubkovým úhlem je situace obdobná. Pokud pozorovatel vidí sledovaný objekt pod sebou, jedná se o hloubkový úhel mezi horizontální linií a linií jeho pohledu na objekt. (Obr. 11. 25)



[98]

Obr. 11. 25 Hloubkový úhel

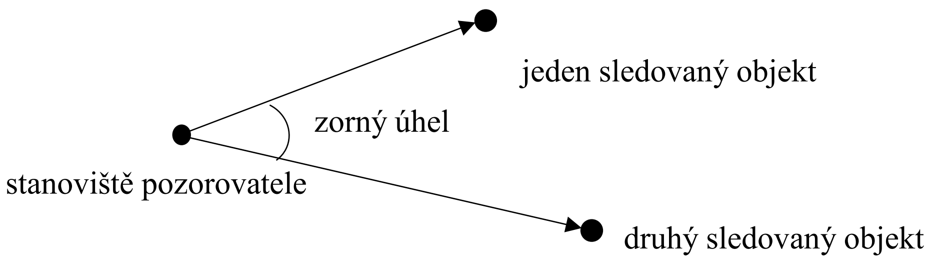
Zorný úhel

Zorným úhlem rozumíme úhel, který svírají „pohledy" ke dvěma různým objektům nebo dvěma různým částem téhož objektu. (Obr. 11. 26)

---

[97] Výškový úhel. In:*Khanacademy.org* [online]. 2019 [cit. 2019-06-25]. Dostupné z: https://cs.khanacademy.org/math/trigonometry/trigonometry-right-triangles

[98] Hloubkový úhel. In:*Khanacademy.org* [online]. 2019 [cit. 2019-06-25]. Dostupné z: https://cs.khanacademy.org/math/trigonometry/trigonometry-right-triangles



[99]

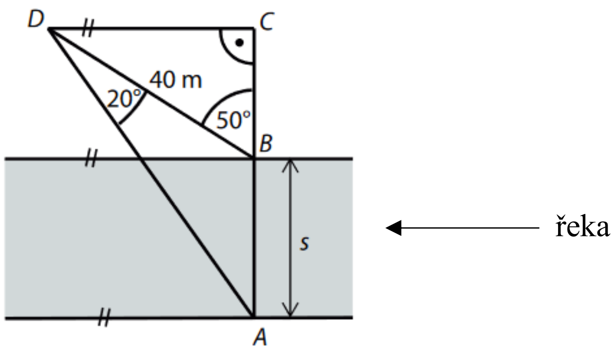
Obr. 11. 26 Zorný úhel

Příklad 1: Vypočítejte délku nákladního vlaku, jsou-li konce vlaku od pozorovatele vzdáleny 136 m a 218 m. Oba tyto konce pozorovatel vidí pod úhlem 38°30´.

Příklad 2: Letadlo letí ve stálé výšce 2 500 m k letišti. Při prvním měření je letadlo vidět pod výškovým úhlem 25°, při druhém měření pod úhlem 62°. Vypočítejte vzdálenost, kterou letadlo uletělo mezi jednotlivými měřeními. [100]

Příklad 3: Hasiči mají na autě nainstalovaný žebřík, který je možné vysunout do maximální délky 25 metrů. Pod jakým úhlem musí žebřík vysunout, má-li dosáhnout k oknu, jež je ve výšce 21,6 m? Výška auta v místě, kde je žebřík umístěn, je 1,48 m.

Příklad 4: Na břehu řeky se žáci učili obsluhovat měřicí přístroje-teodolit a laserový dálkoměr. Změřili následující údaje: $|BD|$ = 40 m, $|\sphericalangle ADB|$ = 20°, $|\sphericalangle CBD|$ = 50°, $|\sphericalangle ACD|$ = $|\sphericalangle BCD|$ = 90° (Obr. 11. 28). Vypočítejte šířku řeky. [101]



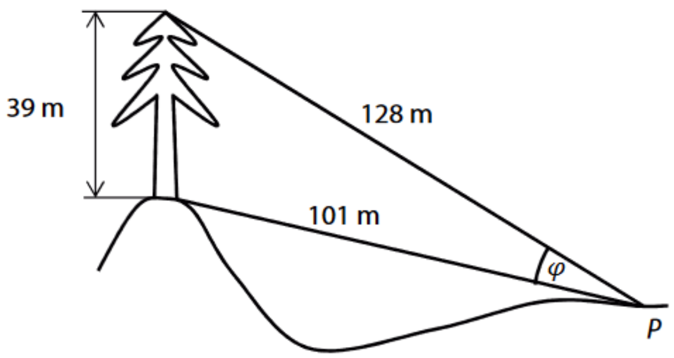
Obr. 11. 28 Řeka-měření teodolitem a laserovým dálkoměrem

[99] Zorný úhel. In:*Khanacademy.org* [online]. 2019 [cit. 2019-06-25]. Dostupné z: https://cs.khanacademy.org/math/trigonometry/trigonometry-right-triangles

[100] Letadlo. In:*Ontola.com* [online]. 2016, 6. 6. 2016 [cit. 2019-06-27]. Dostupné z: https://www.ontola.com/cs/ondi/tavoej/goniometrie-priklad

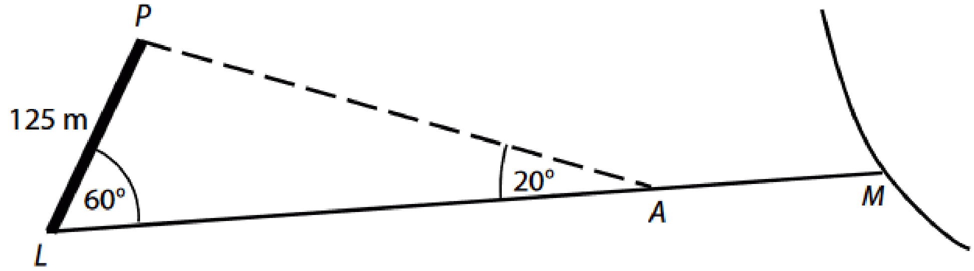
[101] CERMAT. Statnimaturita-matika.cz: Didaktické testy z matematiky. *Maturita z matiky: Didaktické testy z matematiky* [online]. Praha: Bigger, 2017, [cit. 2018-12-30]. Dostupné z: http://www.statnimaturita-matika.cz/wp-content/uploads/maturita-matematika-jaro-2017-test-novy-amos.pdf, str. 13

Příklad 5: Svisle rostoucí strom je vysoký 39 m. Místo pozorování P je od paty kmene stromu vzdáleno 101 m a od vrcholu stromu 128 m. Z místa pozorování P se strom od paty kmene po jeho vrchol jeví v zorném úhlu φ. Určete velikost zorného úhlu. (Obr. 11. 29) [102]



Obr. 11. 29 Strom

Příklad 6: Hranice *LP* mezi dvěma pozemky má délku 125 metrů. Od jejího levého okraje *L* vede rovná pěšina *LM*, která s touto hranicí svírá úhel o velikosti 60°. Na pěšině je stanoviště *A*, z něhož je hranice *LP* vidět pod zorným úhlem 20°. Jaká je vzdálenost *AL* stanoviště *A* od levého okraje *L* hranice *LP*? (Obr. 11. 30) [103]



Obr. 11. 30 Vzdálenost stanovišť

10. 7. Komplexní čísla

Příklad 1: Komplexní číslo $a = \frac{7}{3}\sqrt{2} - \frac{7}{3}\sqrt{2}\,i$ zapište v goniometrickém tvaru.

Příklad 2: Vynásobte komplexní čísla $a = 3 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$,

$b = \frac{2}{9} \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$.

Výpočet ověřte vynásobením daných komplexních čísel v algebraickém tvaru.

---

102 CERMAT. Statnimaturita-matika.cz: Didaktické testy z matematiky. *Maturita z matiky: Didaktické testy z matematiky* [online]. Praha: Bigger, 2016, [cit. 2018-12-30]. Dostupné z: http://www.statnimaturita-matika.cz/wp-content/uploads/maturita-matematika-didakticky-test-zadani-2016-jaro.pdf, str. 11

103 CERMAT. Statnimaturita-matika.cz: Didaktické testy z matematiky. *Maturita z matiky: Didaktické testy z matematiky* [online]. Praha: Bigger, 2015 [cit. 2019-01-01]. Dostupné z: http://www.statnimaturita-matika.cz/wp-content/uploads/matematika-test-zadani-maturita-2015-podzim.pdf, str. 12

Příklad 3: Vypočítejte podíl komplexních čísel $\frac{a}{b}$, a = cos 675° + i sin 675°,

b = cos 945° + i sin 945°.

Výsledek ověřte vydělením daných komplexních čísel v algebraickém tvaru.

Příklad 4: Určete součin komplexních čísel $a = 3 \cdot (\cos 60° - i \sin 60°)$,

$b = \frac{1}{4} \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

Příklad 5: Pomocí Moivreovy věty vypočítejte a^5 mocninu daného komplexního čísla

$a = 3 \cdot (\cos 210° + i \sin 210°)$.

Výsledek ověřte umocněním daného komplexního čísla v algebraickém tvaru.

Příklad 6: V oboru komplexních čísel řešte danou binomickou rovnici $x^3 + 64 = 0$

Příklad 7: V oboru komplexních čísel řešte danou binomickou rovnici

$x^5 = -4 + 4i\sqrt{3}$.

Řešení

10. 1. Zápis úhlu

Příklad 1: a) $\mapsto VA, \mapsto VB$ a d) $\mapsto JI, \mapsto JK$

Ostatní nejsou polopřímky se společným počátkem

Příklad 2: konvexní – $\alpha, \beta, \delta, \varphi, \omega$

ostré - β, δ tupé - α, ω přímý – φ pravý-žádný nekonvexní - γ

Příklad 3: 6 : 00 = 180° 3 : 00 = 90° 8 : 00 = 120°

Příklad 4:

4. 1. 135° lze sestrojit tak, že a) nejprve sestrojíme osu pravého úhlu. Tím získáme úhel o velikosti 45°. Ten pak sečteme s pravým úhlem.

b) sestrojíme osu pravého úhlu, tím získáme úhel o velikosti 45° a ten pak odečteme od přímého úhlu.

4. 2. 105° lze sestrojit tak, že a) nejprve sestrojíme úhel o velikosti 15° tak, že úhel o velikosti 60° (jeho konstrukce byla popsána dříve) rozdělíme osou na úhly o velikosti 30° a jeden z nich pak opět osou rozdělíme na úhly s velikostí 15°. Tento úhel přičteme k pravému úhlu.

b) osou rozdělíme úhel o velikosti 60° na dva úhly s velikostí 30°. Jeden z nich pak odečteme od úhlu o velikosti 135° (postup a)

4. 3. 120° lze sestrojit tak, že a) k pravému úhlu přičteme úhel o velikosti 30°.

b) od přímého úhlu odečteme úhel o velikosti 60°.

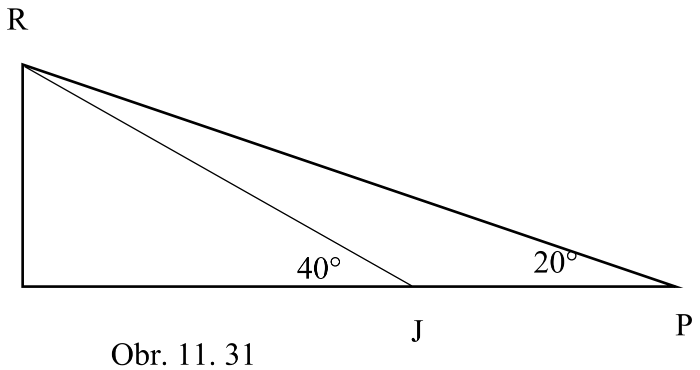
4. 4. 75° lze sestrojit tak, že a) sečteme úhly s velikostí 60° a 15°.

b) od pravého úhlu odečteme úhel o velikosti 15°.

c) úhel o velikosti 150° rozdělíme osou na dva úhly s velikostí 75°.

Příklad 5:

K vyřešení této úlohy je dostačující náčrtek (Obr. 11. 31)



Obr. 11. 31

K rozhledně byla blíže Jana.

10. 2. Operace s úhly

Příklad 1: a) $158' = 2°\ 38'$ b) $328' = 5°28'$
c) $421' = 7°\ 01'$ d) $555' = 9°\ 15'$

Příklad 2: a) $3°\ 15' = 3 \cdot 60' + 15' = 195'$ b) $2°\ 07' = 2 \cdot 60' + 7' = 127'$
c) $5°\ 12' = 5 \cdot 60' + 12' = 312'$ d) $7°\ 77' = 7 \cdot 60' + 77' = 497'$

Příklad 3: a) $2{,}5° = 2°\ 30'$ b) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{\circ} = 1°\ 40'$ c) $3{,}75° = 3°\ 45'$
d) $\left(3\frac{3}{5}\right)^{\circ} = 3°\ 36'$
e) $12{,}4° = 12° + 0{,}4 \cdot 60' = 12° + 24' = 12°\ 24'$
f) $23{,}7° = 23° + 0{,}7 \cdot 60' = 23° + 42' = 23°\ 42'$
g) $21{,}3° = 21° + 0{,}3 \cdot 60' = 21° + 18' = 21°\ 18'$
h) $31{,}25° = 31° + 0{,}25\ \ 60' = 31° + 15' = 31°\ 15'$

Příklad 4: a) $92° < 5600' \quad (5520' < 5600')$
b) $380' = 6°\ 20' \quad (380' = 380')$
c) $3°30' < 330' \quad (210' < 330')$

Příklad 5: a) $3°\ 15' + 7°\ 22' = 10°\ 37'$
b) $42°\ 33' + 57°\ 59' = 99°\ 92' = 100°\ 32'$
c) $87°\ 55' + 73°\ 44' = 160°\ 99' = 161°\ 39'$
d) $22°\ 54' + 17°\ 34' = 39°\ 88' = 40°\ 28'$
e) $98°\ 32' + 49°\ 52' = 147°\ 84' = 148°\ 24'$
f) $156°\ 17' + 79°\ 58' = 235°\ 75' = 236°\ 15'$

Příklad 6: a) 45° b) 15° 23′ · 3 = 45° 69′ = 46° 09′
92° 23° 34′ · 4 = 92° 136′ = 94° 16′
140° 36° 27′ · 5 = 180° 135′ = 182° 15′
144° 29° 42′ · 6 = 174° 252′ = 178° 12′

Příklad 7: a) 47° 13′ b) 83° 07′ c) 78° 07′
d) 85° 15′ - 47° 32′ = 84° 75′ - 47° 32′ = 37° 43′
e) 92° 29′ - 54° 55′ = 91° 89′ - 54° 55′ = 37° 34′
f) 122° 47′ - 98° 56′ = 121° 107′ - 98° 56′ = 23° 51′

Příklad 8: a) 124° 36′ : 4 = 31° 09′
115° 35′ : 5 = 23° 07′
96° 54′ : 6 = 16° 09′
123° 12′ : 3 = 41° 04′

b) 126° : 5 = 125° 60′ : 5 = 25° 12′
83° : 5 = 80° 180′ : 5 = 16° 36′
85° 03′ : 7 = 84° 63′ : 7 = 12° 09′
50° 24′ : 4 = 48° 144′ : 4 = 12° 36′

Příklad 9: a) $\alpha + 43°\ 15' = 97°$
$\alpha = 97° - 43°\ 15'$
$\alpha = 53°\ 45'$

b) $76°\ 39' - \alpha = 25°\ 32'$
$\alpha = 76°\ 39' - 25°32'$
$\alpha = 51°\ 07'$

10. 3. Grafické operace s úhly

Příklad 1: $\alpha + \beta = 117°$ ….. tupý úhel

Příklad 2: $\delta - \gamma = 76°$ …… ostrý úhel

Příklad 3: $\alpha + \gamma - \beta = 48°$ ….. ostrý úhel

Příklad 4: $\beta - \gamma + \alpha = 90°$ ….. pravý úhel

Příklad 5: Nejprve graficky od $(\alpha + \beta + \gamma) - (\alpha + \beta) = \gamma$, potom $(\alpha + \gamma) - \gamma = \alpha$

Příklad 6: a) graficky: nejprve $2 \cdot \alpha$, potom $2 \cdot\ \alpha - \beta$
b) početně: $\gamma = 2 \cdot\ \alpha - \beta$
$\gamma = 2 \cdot\ 36° - 54°$
$\gamma = 18°$

Výsledný úhel je ostrý.

Příklad 7: a) graficky: nejprve $\frac{\beta}{2}$, potom $\alpha + \frac{\beta}{2}$
b) početně: $\gamma = 62° + \frac{74°}{2}$

$$\gamma = 62° + 37°$$
$$\gamma = 99°$$

Výsledný úhel je tupý.

10. 4. Dvojice úhlů

Příklad 1: a) ANO b) ANO c) NE
d) NE e) NE f) ANO

Příklad 2: $\alpha = \gamma = 48°$ $\beta = \delta = 132°$

Příklad 3: $\beta = 3\gamma$

$$\beta + \gamma = 4\alpha$$
$$3\gamma + \gamma = 4\alpha$$
$$4\gamma = 4\alpha$$
$$\gamma = \alpha$$

$$\alpha + 3\alpha + \alpha = 180°$$
$$4\alpha = 180°$$
$$\alpha = 36°$$

$\alpha = \gamma = \varphi = \delta = 36°$ $\beta = \varepsilon = 3 \cdot 36° = 108°$

Příklad 4: a) $\alpha = 90°$ $\beta = \delta = 60°$ $\gamma = 30°$

b) $\alpha = 35°$ $\gamma = 45°$
$\beta = \delta = 180° - (35° + 45°) = 100°$

c) $\beta = 30°$ $\delta = 120°$ $\alpha = \gamma = 30°$

Příklad 5: a) $\beta = 180° - 60° = 120°$ $\gamma = 180° - 140° = 40°$
$\alpha = 180° - (120° + 40°) = 20°$

b) $\alpha = 180° - 115° = 65°$ $\beta = 180° - 135° = 45°$

$\gamma = 180° - (65° + 45°) = 70°$

Příklad 6: $\beta = \iota = \lambda = 75°$ $\alpha = \gamma = \kappa = \mu = 180° - 75° = 105°$

$\theta = \xi = \varepsilon = 40°$ $\eta = \vartheta = \delta = \epsilon = 180° - 40° = 140°$

Příklad 7: a) Chybně je úhel o velikosti 150°. Má být 160°
b) Chybně je úhel o velikosti 80°. Má být 60°.

Příklad 8:

$$\alpha + 3\alpha = 180°$$
$$4\alpha = 180°$$
$$\alpha = 45°$$

$\beta = 135°$

Příklad 9:

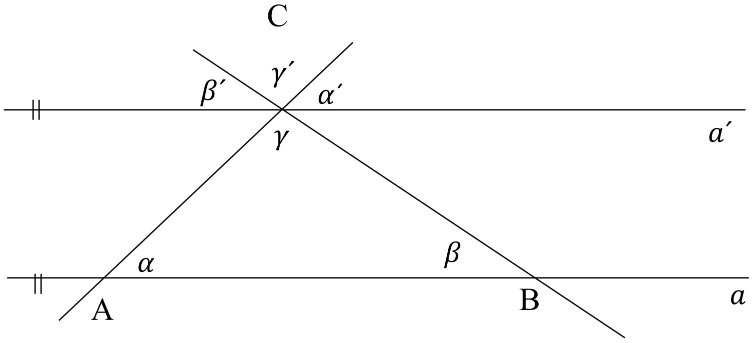
$$2\alpha = 144°$$
$$\alpha = 72°$$

Příklad 10: $\alpha = 25°$ $\beta = 50°$ $\gamma = 130°$
$\delta = 65°$ $\varepsilon = 25°$ $\varphi = 65°$

Příklad 11:

$$\alpha + \alpha + 35° = 180°$$
$$2\alpha + 35° = 180°$$
$$2\alpha = 145°$$
$$\alpha = 72°\ 30'$$

Příklad 12: K důkazu použijeme trojúhelník *ABC* (Obr. 11. 32)



Obr. 11. 32

Sestrojíme-li rovnoběžku s přímkou a tak, že $C \in a'$, pak přímka a' vytvoří spolu se stranami trojúhelníku u vrcholu C několik úhlů. Úhel α'je souhlasný s úhlem α. Má proto stejnou velikost jako úhel α. Obdobně to platí s úhly β a β'. Úhly γ, γ' jsou vrcholové. Mají proto také stejnou velikost. Z obrázku je patrné, že $\alpha' + \beta' + \gamma' = 180°$. Protože tyto úhly mají stejnou velikost jako jejich „bezčárkoví“ jmenovci, a protože stejnou operaci lze provést pro jakýkoli trojúhelník, je dokázáno, že součet vnitřních úhlů trojúhelníku je 180°.

Příklad 13:

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \alpha + \beta &= 240° \\ \alpha + \beta &= 180° \end{aligned}\right\} \quad \alpha + 180° = 240° \quad \Rightarrow \quad \alpha = 60°$$

$$\beta = 180° - 60°$$
$$\beta = 120°$$

Příklad 14:

$$\alpha = 55°$$
$$\beta = \gamma = 180° - (55° + 80°) = 45°$$
$$\delta = 180° - (92° + 45°) = 43°$$
$$\omega = 180° - 43° = 137°$$
$$\varepsilon = \omega = 137°$$

Příklad 15:

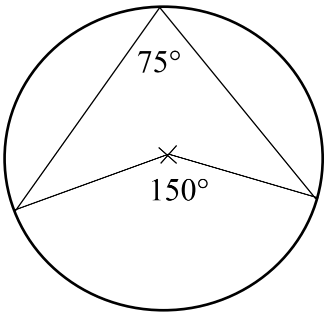
α a γ jsou ……souhlasné………………
γ a β jsou ……vrcholové………………
β a ε jsou …….souhlasné………………
δ a ε jsou …….vedlejší…………………
α a δ jsou ……vedlejší…………………
α a β jsou ……střídavé…………………

Příklad 16:

$\alpha = 70°$	$\beta = 70°$	$\gamma = 70°$
$\delta = 110°$	$\varepsilon = 40°$	$\alpha' = 70°$

10. 5 Úhly příslušné k obvodu kružnice

Příklad 1: (Obr. 11. 33)

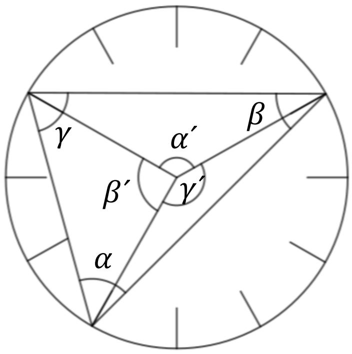


Obr. 11. 33

Délka oblouku je $\frac{5}{12}$ kružnice, proto je velikost středového úhlu jsou $\frac{5}{12}$ z 360° = 150°

Velikost obvodového úhlu je polovinou velikosti středového úhlu, tj. $\frac{150°}{2}$ = 75°

Příklad 2:



Obr. 11. 34

Všechny tři vyznačené úhly jsou úhly obvodovými. Doplníme k nim odpovídající středové úhly (Obr. 11. 34), jejich velikosti dokážeme snadno zjistit. Obvodové úhly pak mají velikost poloviční oproti úhlům středovým

1) $\beta' = 360° \cdot \frac{3}{12} = 90°$

$\beta = \frac{\beta'}{2} = 45°$

2) $\alpha' = 360° \cdot \frac{4}{12} = 120°$

$\alpha = \frac{\alpha'}{2} = 60°$

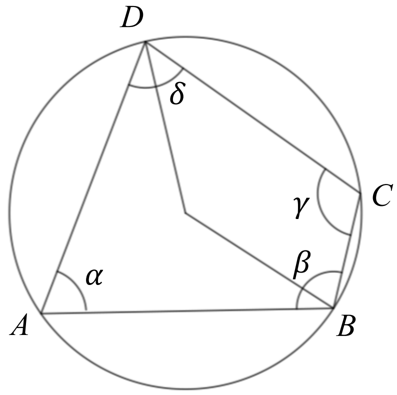
3) $\gamma' = 360° \cdot \frac{5}{12} = 150°$

$\gamma = \frac{\gamma'}{2} = 75°$

Zkouška: $\alpha + \beta + \gamma = 60° + 45° + 75° = 180°$

Příklad 3:

Čtyřúhelník *ABCD* je tětivový, tzn. lze mu opsat kružnici (Obr. 11. 35)



Obr. 11. 35

Úhel α je obvodovým úhlem k menšímu oblouku BD, úhel γ je obvodovým úhlem k většímu oblouku BD, tzn. $\alpha + \gamma = 180°$

$$\gamma = 180° - \alpha$$

$$\gamma = 180° - 54°$$

$$\gamma = 126°$$

Úhel β je obvodovým úhlem k většímu oblouku AC, úhel δ je obvodovým úhlem k menšímu oblouku AC, tzn.

$$\beta + \delta = 180°$$

$$\delta = 180° - \beta$$

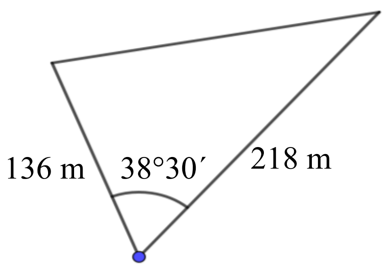
$$\delta = 180° - 94°$$

$$\delta = 86°$$

Zkouška: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 54° + 94° + 126° + 86° = 360°$

10. 6. Goniometrie

Příklad 1:



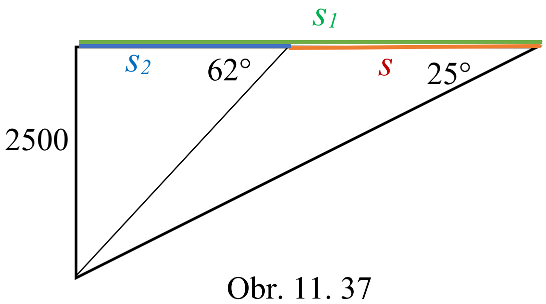
Obr. 11. 36

Na obrázku (Obr. 11. 36) je znázorněno, že známe dvě strany trojúhelníka a úhel jimi sevřený, tzn. použijeme kosinovou větu

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$
$c^2 = 136^2 + 218^2 - 2 \cdot 136 \cdot 218 \cdot \cos 38{,}5°$
$c \doteq 139{,}6$ m

Vlak je dlouhý přibližně 139,6 metru.

Příklad 2:



Obr. 11. 37

Na obrázku (Obr. 11. 37) máme dva pravoúhlé trojúhelníky. V obou známe úhel a odvěsnu k tomuto úhlu protilehlou. Vypočítat potřebujeme odvěsnu k úhlu přilehlou, tzn. použijeme funkci tangens.

$$\text{tg } 25° = \frac{2500}{s_1} \qquad \text{tg } 25° = \frac{2500}{s_2}$$

$$s_1 = \frac{2500}{\text{tg } 25°} \qquad s_2 = \frac{2500}{\text{tg } 62°}$$

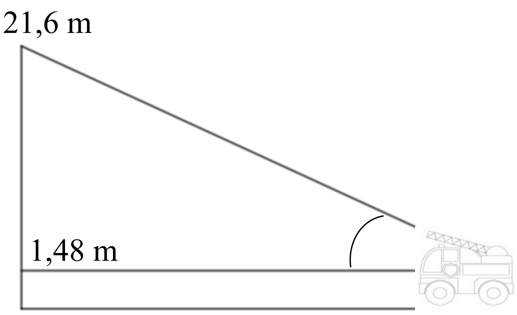
$$s_1 \doteq 5361 \text{ m} \qquad s_2 \doteq 1329 \text{ m}$$

Vzdálenosti ještě musíme odečíst ⇒ $s = s_1 - s_2$

$s \doteq 4\,032$ m

Mezi dvěma měřeními letadlo uletělo přibližně vzdálenost 4 032 metrů.

Příklad 3:



Obr. 11. 38

Máme zadaný pravoúhlý trojúhelník (Obr. 11. 38), ve kterém známe délku odvěsny protilehlé (výška domu k oknu) ke zjišťovanému úhlu (α) a délku přepony (délka žebříku).

Použijeme sinovou větu.

$$\sin \alpha = \frac{(21{,}6 - 1{,}48)}{25}$$

$$\sin \alpha = \frac{20{,}12}{25}$$

$$\alpha \doteq 53°35'$$

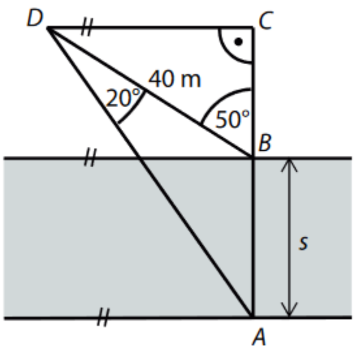
Hasiči musí žebřík vysunout pod úhlem přibližně 53°35´. [104]

[104] Hasičské auto. In: *Vytvarna-vychova.cz* [online]. 2014 [cit. 2019-06-03]. Dostupné z: http://vytvarna-vychova.cz/hasicske-auto/

Příklad 4:

Výpočet začneme tím, že určíme velikosti dvou vnitřních úhlů trojúhelníku *ABD*.

(Obr. 11. 39)



Obr. 11. 39

$|\sphericalangle ABD| = 180° - 50° = 130°$

$|\sphericalangle DAB| = 180° - (20° + 130°) = 30°$

Nyní známe dva vnitřní úhly trojúhelníku a stranu proti jednomu z nich, tzn. použijeme sinovou větu

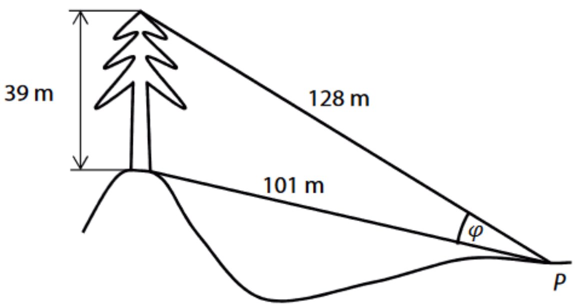
$$\frac{40}{\sin 30°} = \frac{d}{\sin 20°}$$

$$d = \frac{40 \cdot \sin 20°}{\sin 30°}$$

$$d \doteq 27,4 \text{ m}$$

Řeka je široká přibližně 27, 4 metr

Příklad 5: (Obr. 11. 40)



Obr. 11. 40

Máme zadané všechny tři strany trojúhelníku. Chceme zjistit velikost jednoho vnitřního úhlu, tzn. použijeme kosinovou větu

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2bc}$$

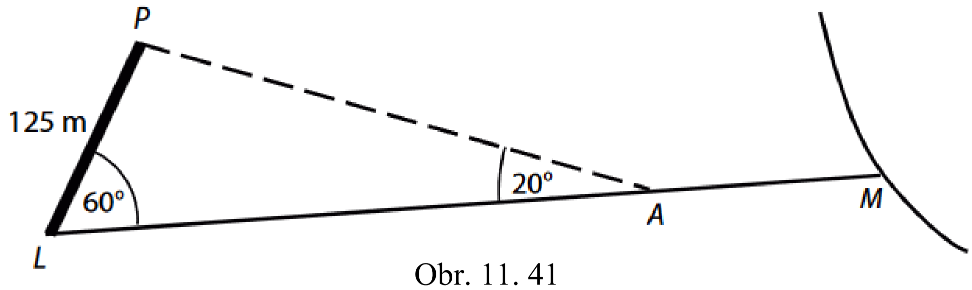
$$\cos\gamma = \frac{101^2 + 128^2 - 39^2}{2 \cdot 101 \cdot 128}$$

$$\cos\gamma = \frac{25064}{25856}$$

$$\gamma \doteq 14° \, 13'$$

Velikost zorného úhlu je přibližně 14° 13´.

Příklad 6: (Obr. 11. 41)



Obr. 11. 41

$|AL|$= ?

Nejprve dopočítáme zbývající vnitřní úhel: $|\sphericalangle APL|$ = 180° - (60° + 20°)

$|\sphericalangle APL|$ = 100°

Nyní můžeme použít sinovou větu: $\frac{125}{\sin 20°} = \frac{|AL|}{\sin 100°}$

$$|AL| = \frac{125 \cdot \sin 100°}{\sin 20°}$$

$$|AL| \doteq 360 \text{ m}$$

Vzdálenost *AL* stanoviště *A* od levého okraje *L* hranice *LP* je přibližně 360 metrů.

10. 7. Komplexní čísla

Příklad 1:

$$|a| = \sqrt{\left(\frac{7}{3}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{9} \cdot 2 + \frac{49}{9} \cdot 2} = \sqrt{\frac{98}{9} + \frac{98}{9}} = \sqrt{\frac{196}{9}} = \frac{14}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{a_1}{|a|} = \frac{\frac{7}{3}\sqrt{2}}{\frac{14}{3}} = \frac{7\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{14} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha &= \frac{a_2}{|a|} = \frac{-\frac{7}{3}\sqrt{2}}{\frac{14}{3}} = -\frac{7\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{14} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \alpha = 315° = \frac{7}{4}\pi$$

$$\Rightarrow \qquad a = \frac{14}{3} \cdot (\cos 315° + i \sin 315°)$$

Příklad 2:

$$a \cdot b = 3 \cdot \frac{2}{9} \cdot \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{4}\right)\right] = \frac{2}{3} \cdot \left(\cos\frac{10\pi}{4} + i \sin\frac{10\pi}{4}\right)$$

$$a \cdot b = \frac{2}{3} \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{2} + i \sin\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot (0 + i \cdot 1)$$

$$a \cdot b = \frac{2}{3}\, i$$

$a = 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\qquad b = \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$a \cdot b = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{4} + i\,\frac{2}{4} + i\,\frac{2}{4} - i^2\,\frac{2}{4}\right)$

$a \cdot b = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i + \frac{1}{2}\right)$

$a \cdot b = \frac{2}{3}\,i$

$\Rightarrow 3 \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \cdot \frac{2}{9} \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) =$

$= 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{4} + \frac{2}{4}\,i + \frac{2}{4}\,i - \frac{2}{4}\,i^2\right)$

$= \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2} + i + \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\,i$

Příklad 3:

$\frac{a}{b}$ = cos (675° - 945°) + *i* sin (675° - 945°) = cos (- 270°) + *i* sin (- 270°)

$\frac{a}{b}$ = cos 90° + *i* sin 90° $\qquad \Rightarrow \qquad \frac{a}{b} = i$

$a = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad b = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} + i^2\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - i^2\frac{1}{2}} = -\frac{\frac{1}{2} - i - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{i}{1}$$

$$\frac{a}{b} = i$$

Příklad 4:

V tomto případě číslo *a* neodpovídá předpisu komplexního čísla v goniometrickém tvaru: $a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, tzn. musíme nejprve číslo *a* upravit tak, aby předpisu odpovídalo.

Využijeme toho, že funkce *sinus* je lichá, proto: - sin α = sin (- α)

funkce *kosinus* je sudá, proto: cos α = cos (-α)

a = 3 · (cos 60° - *i* sin 60°) = 3 · (cos (- 60°) + *i* sin (- 60°))

a = 3 · (cos 300° + *i* sin 300°)

Ještě převedeme velikost úhlu v čísle *b* do stupňové míry (nebo naopak *a* do obloukové míry)

$b = \frac{1}{4}$ · (cos 210° + *i* sin 210°)

Nyní už můžeme použít vzorec pro součin komplexních čísel v goniometrickém tvaru

$a \cdot b = 3 \cdot \frac{1}{4}[\cos(300° + 210°) + i \sin(300° + 210°)]$

$a \cdot b = \frac{3}{4} \cdot (\cos 510° + i \sin 510°) = \frac{3}{4} \cdot (\cos 150° + i \sin 150°)$

Příklad 5:

a^5, $a = 3 \cdot (\cos 210° + i \sin 210°)$

$a^5 = 3^5 \cdot (\cos 5 \cdot 210° + i \sin 5 \cdot 210°) = 243 \cdot (\cos 1050° + i \sin 1050°)$

$a^5 = 243 \cdot (\cos 330° + i \sin 330°)$

$a^5 = 243 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$

Zkouška: $a = 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$

$a^5 = 3^5 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)^5 = -243 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)^5$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 + 5 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}i\right) + 10 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}i\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}i\right)^3 + \\ + 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}i\right)^4 + \left(\frac{1}{2}i\right)^5$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{9\sqrt{3}}{32} + 5 \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{2}i + 10 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) + 10 \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{8}i\right) + \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{32}i =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{32} + \frac{45}{32}i - \frac{30\sqrt{3}}{32} - \frac{30}{32}i + \frac{5\sqrt{3}}{32} + \frac{1}{32}i$$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right)^5 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$a^5 = -243 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 243 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

Příklad 6: $x^3 + 64 = 0$

$x^3 = -64$

$|x| = \sqrt{0 + (-64)^2} = 64$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{x_1}{|x|} = \dfrac{-64}{64} = -1 \\ \sin\alpha = \dfrac{x_2}{|x|} = \dfrac{0}{64} = 0 \end{array}\right\} \quad \alpha = \pi$$

$x_k = \sqrt[3]{64} \cdot \left(\cos \frac{\pi+2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi+2k\pi}{3}\right)$

$x_0 = 4 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$x_0 = 2 + 2\sqrt{3}$

$x_1 = 4 \cdot \left(\cos \frac{\pi+2\pi}{3} + i \sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right) = 4 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi) = 4 \cdot (-1 + 0\ i)$

$x_1 = -4$

$x_2 = 4 \cdot \left(\cos \frac{\pi+4\pi}{3}\ i \sin \frac{\pi+4\pi}{3}\right) = 4 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i \sin\frac{5\pi}{3}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} - i\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$x_2 = 2 - 2\sqrt{3}$

<u>Příklad 7</u>: $x^5 = -4 + 4\ i\sqrt{3}$

$|x| = \sqrt{(-4)^2 + \left(4\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{16 + 16 \cdot 3} = \sqrt{64} = 8$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{x_1}{|x|} = \dfrac{-4}{8} = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{x_2}{|x|} = \dfrac{4\sqrt{3}}{8} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \quad \alpha = 120° = \frac{2\pi}{3}$$

Dosadíme do vzorce $x_k = \sqrt[n]{|x|} \cdot \left(\cos \frac{\alpha+2k\pi}{n}\ i \sin \frac{\alpha+2k\pi}{4}\right), k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

$x_k = \sqrt[5]{8} \cdot \left(\cos \frac{\frac{2}{3}\pi+2k\pi}{5} + i \sin \frac{\frac{2}{3}\pi+2k\pi}{5}\right)$

$x_0 = \sqrt[5]{8} \cdot \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3}}{5} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3}}{5}\right) = \sqrt[5]{8} \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{15} + i \sin \frac{2\pi}{15}\right)$

$x_1 = \sqrt[5]{8} \cdot \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{5} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi}{5}\right) = \sqrt[5]{8} \cdot \left(\cos \frac{\frac{2\pi+6\pi}{3}}{5} + i \sin \frac{\frac{2\pi+6\pi}{3}}{5}\right)$

$x_1 = \sqrt[5]{8} \cdot \left(\cos \frac{8\pi}{15} + i \sin \frac{8\pi}{15}\right)$

$$x_2 = \sqrt[5]{8} \cdot \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3}+4\pi}{5} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{2}+4\pi}{5} \right) = \sqrt[5]{8} \cdot \left(\cos \frac{\frac{2\pi+12\pi}{3}}{5} + i \sin \frac{\frac{2\pi+12\pi}{3}}{5} \right)$$

$$x_2 = \sqrt[5]{8} \cdot \left(\cos \frac{14\pi}{15} + i \sin \frac{14\pi}{15} \right)$$

$$x_3 = \sqrt[5]{8} \cdot \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{5} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3}+6\pi}{5} \right) = \sqrt[5]{8} \cdot \left(\cos \frac{\frac{2\pi+18\pi}{3}}{5} + i \sin \frac{\frac{2\pi+18\pi}{3}}{5} \right)$$

$$x_3 = \sqrt[5]{8} \cdot \left(\cos \frac{20\pi}{15} + i \sin \frac{20\pi}{15} \right) = \sqrt[5]{8} \cdot \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$x_4 = \sqrt[5]{8} \cdot \left(\cos \frac{\frac{2\pi}{3}+8\pi}{5} + i \sin \frac{\frac{2\pi}{3}+8\pi}{5} \right) = \sqrt[5]{8} \cdot \left(\cos \frac{\frac{2\pi+24\pi}{3}}{5} + i \sin \frac{\frac{2\pi+24\pi}{3}}{5} \right)$$

$$x_4 = \sqrt[5]{8} \cdot \left(\cos \frac{26\pi}{15} + i \sin \frac{26\pi}{15} \right)$$

11. Plochozemě

Všichni považujeme za samozřejmé, že se s úhly setkáváme při matematice, fyzice, zeměpise, astronomii atd., i to, že se bez nich neobejdou např. navigační systémy. Málokoho ale asi napadne, že na úhly můžeme narazit i při pročítání populární literatury. Podařilo se mi objevit knihu, jejíž autor poskytuje velmi neobvyklý pohled na rovinné útvary v tzv. Plochozemi. Autorem je anglický učitel, spisovatel a teolog Edwin Abbott. Kniha byla vydána již v roce 1884. Byla přeložena do více než třiceti jazyků, do češtiny však až v roce 2013. Někdy bývá označována za matematickou fikci nebo také matematicko-filozofickou fantazii na geometrické téma. Současně je však také sociální satirou. Kritizuje nerovnoprávné postavení žen ve společnosti.

Plochozemě je velmi zvláštní „územní celek“. Obyvatele tvoří výhradně rovinné útvary. Pohled na ně není ale tradiční-tak, jak jsme zvyklí. Na obyvatele nepohlížíme shora, ale z roviny, v níž se nacházejí. Autor pro lepší představu uvádí příklad s pencí ležící na stole. Pokud se na minci díváme shora, vidíme kruh. Když se však skláníme stále níže, tvar se postupně zkresluje. Nejprve tedy vidíme kruh, později elipsu a v okamžiku, kdy se pohledem dostaneme až na hranu stolu, můžeme minci spatřit už pouze jako přímku (Předpokládám, že se má jednat o úsečku, a že označení přímka zde vznikla nepřesným překladem z originálu). Stejný princip platí pro všechny obyvatele Plochozemě. [105]

Přestože všechny rovinné útvary vidíme jako přímky, nejsou si obyvatelé Plochozemě rovni. Nejnižší postavení zaujímají rovnoramenné trojúhelníky, tvoří třídu Vojáků a nejnižších Dělníků. Mají velmi krátkou základnu a úhel u vrcholu ostrý a hrozivý. O stupínek výše stojí Rovnostranné trojúhelníky. Ty tvoří střední třídu. Pětiúhelníky a čtverce jsou považováni za Odborníky a Džentlmeny. Šlechtu tvoří šesti a víceúhelníky. Pokud je množství stran tak velké a délky stran tak malé, že je nelze odlišit od kruhu, patří Plochozemšťan do kruhového, tzn. kněžského řádu.

[105] ABBOTT, Edwin Abbott. *Plochozemě: román mnoha rozměrů*. Brno: B4U, 2013. ISBN 978-80-87222-21-8, str. 18-19.

I v této jasně určené hierarchii je však možný postup. Syn má vždy o jednu stranu více než jeho otec. Synem čtverce je pětiúhelník, synem pětiúhelníku šestiúhelník, atd. To se však netýká Vojáků a Dělníků. Ti takto povýšit nemohou. Zcela výjimečně se stane, že se v manželství Rovnoramennému otci narodí Rovnostranný potomek. Často se pak v takovém případě stane, že dítě do té míry napodobuje své rodiče, že opět klesne do třídy Rovnoramenných. Ti jsou v Plochozemi považováni za lůzu.

A jak je to v Plochozemi s ženami? Ty tvoří zvláštní kategorii. Všechny ženy vypadají jako jehla. Jsou proto velmi nebezpečné. Pokud jsou k pozorovateli natočeny bokem, vypadají jako přímka. Pokud se ale natočí ústy, pozorovatel vidí pouze bod. V případě, že se k ženě v tuto chvíli kdokoliv neopatrně přiblíží, může dojít k fatálnímu zranění. Ženy mají velmi podřadné postavení.

Obyvatelé Plochozemě se nejsou schopni navzájem rozeznat zrakem. Poznávají se tedy dotykem. Díky dlouholeté praxi a zkušenostem dospěli k tomu, že není nezbytné, aby se vzájemně museli dotknout všech stran poznávaného mnohoúhelníku. Stačí dotyk na úhel. Je však při tom potřeba dávat velký pozor a být ostražitý. Ostré úhly jsou velmi nebezpečné. Velmi snadno, i neúmyslně, mohou způsobit závažné, nenapravitelné zranění. Aby neohrozil pozorovatele, musí proto poznávaný vždy stát zcela nehybně.

Z toho, co již bylo o Plochozemi řečeno, je zjevné, že úhly zde hrají velmi významnou, dá se říci, stěžejní roli.

Dalším důvodem, proč jsou úhly v Plochozemi tak důležité, je to, že mozková kapacita obyvatel se zde měří velikostí vnitřních úhlů při vrcholech-u rovnoramenného trojúhelníku úhlu proti základně.

Autor knihy si za čtenáře klade otázku: „*Co můžete vy v Plochozemi vědět o úhlech, stupních a minutách? My v prostoru úhel vidíme, protože jsme schopni spatřit dvě Přímky sbíhající se jedna k druhé, ale vy, kteří vidíte vždy pouze jednu Přímku nebo útržky Přímek slývající do Přímky jediné – jak byste asi mohli rozeznat úhel, natož zaznamenávat úhly různých velikostí?*“

Následně se čtenář dočká vysvětlení, že přestože v Plochozemi úhly nevidí, dokáží je poměrně přesně rozeznat. Umožňuje jim to smysl, který je v Plochozemi mnohem důležitější než zrak. A to je hmat. Jeho pomocí a dlouholetým cvikem rozlišují úhly přesněji než občané Prostorozemě zrakem.

U třídy Rovnoramenných začínají obyvatelé s velikostí úhlu na půl stupni. V každé generaci pak roste velikost tohoto úhlu o další půl stupeň – až do 60°. Tvoří tak „Abecedu úhlů“, tj. stupnici po půl stupních – od 0,5° až do 60°. Intelekt takových Rovnoramenných jedinců je tedy maximálně 60°. Jednotlivci s mozkovou kapacitou napřesahující 10° jsou zbaveni občanských práv. [106]

Z právě popsané charakteristiky je zřejmé, že v Plochozemi hraje úhel důležitější roli než v naší „Prostorozemi“. Kniha nabízí velmi zajímavý a zábavný pohled na rovinné útvary.

[106] ABBOTT, Edwin Abbott. *Plochozemě: román mnoha rozměrů*. Brno: B4U, 2013. ISBN 978-80-87222-21-8, str. 34-37.

Závěr

V bakalářské práci se mi podařilo nalézt odpovědi na většinu otázek, které jsem si položila.

Na otázku, kdy naši předkové „objevili“ úhel, je možné odpovědět v podstatě pouze na základě domněnek. Z doby, kdy k tomu, s největší pravděpodobností, došlo (doba kamenná), neexistují žádné záznamy. Nemáme žádný důkaz o tom, že to tak opravdu bylo. Pouze tedy předpokládáme, že takový vývoj byl nevyhnutelný. Aktivně pak lidé s úhly nepochybně museli začít pracovat v době, kdy opustili jeskyně a byli nuceni začít vyměřovat pole, silnice a stavět obydlí. Aby jim mohla být spravedlivě vyměřena daň, musely být jejich pozemky zakresleny. Tam již je nepochybné, že byl úhel běžně užíván. Potvrdila se mi má domněnka, že k hlavnímu pokroku ve znalostech a využívání úhlu došlo v souvislosti s rozvojem astronomie a potřeby navigace. Díky velkému tlaku na potřeby přesnějšího měření úhlů došlo k popsanému vývoji stále dokonalejších přístrojů až k současným elektronickým.

Téměř ve všech, na základní škole běžně užívaných, učebnicích, je úhel zaveden stejným způsobem. Je vymezen dvěma polopřímkami se společným počátkem. Jedinou výjimku představuje učebnice z nakladatelství Fortuna (1), která úhel zavádí pomocí dvou různoběžných přímek. V učebnicích z nakladatelství Fraus, Hejného metodě, Hravé matematice, nakl. Prometheus, Didaktis (2, 3, 4, 6, 7, 9, 10) značí úhel pomocí třech písmen i pomocí jednoho písmene řecké abecedy, v ostatních (1, 5, 8) pouze třemi písmeny. Ve všech učebnicích, kromě Fortuny a Hejného metody (1, 3) jsou úhly označeny obloučkem. Všechny, kromě učebnice nakladatelství Nová škola, s. r. o. 2015 (8) zdůrazňují, že je úhel částí roviny. Téměř všechny, kromě Fortuny a Promethea (1, 7) pak přidávají informaci o tom, že je úhel nekonečný.

Rozdělení úhlů podle velikosti je, myslím, všeobecně známá skutečnost. K překvapivému zjištění jsem však dospěla u dvojic úhlů. V naprosté většině učebnic jsou dvojice souhlasných a střídavých úhlů definovány pomocí dvojice rovnoběžných (a jedné s nimi různoběžné přímky). To je však pouze zvláštní případ. Ve skutečnosti tyto dvojice úhlů najdeme u každé trojice navzájem různých různoběžných přímek (které netvoří svazek). Tyto úhly jsou střídavými nebo souhlasnými, jen nemají stejnou velikost. Protože jsou ale takto definované úhly těžko využitelné k výpočtům, uvádí se v učebnicích většinou definice právě pomocí rovnoběžek.

Novým „objevem“ pro mne byly také úhly doplňkové, výplňkové, styčné a přilehlé. Asi proto, že ani s těmito poznatky se v běžně užívaných učebnicích nesetkáváme.

Velmi mne zaujala kniha (román mnoha rozměrů) Plochozemě. Poskytuje netradiční, zajímavý a humorný náhled do světa rovinných útvarů. Nejsem si jista jedním pojmem. Asi bych místo Přímky volila označení úsečka. Kniha je ale opravdu velmi zajímavá. Mohu ji všem vřele doporučit.

Jsem velmi ráda, že jsem si při psaní této práce prostudovala spoustu materiálů-jak historických, tak současných. Zcela jistě mě to posunulo o stupínek dále a až při výuce narazíme na téma úhlů, budu ji moci obohatit o zajímavá fakta (nejen z dějin matematiky), která se často opomíjejí. Pro děti jsou ale určitě zajímavá.

Myslím, že práce cíle naplnila. Dává učitelům matematiky na základní škole možnost zvolit si na základě stanovených kritérií učebnici, která jim bude k danému tématu nejlépe vyhovovat. Předkládá přehled vlastností úhlů. Poskytuje žákům základních škol i studentům středních škol možnost procvičit si teorii na příkladech, zkontrolovat si výsledky. Předkládá historický náhled pojmu úhel.

Seznam použitých informačních zdrojů

Tištěné zdroje

ABBOTT, Edwin Abbott. *Plochozemě: román mnoha rozměrů*. Brno: B4U, 2013. ISBN 978-80-87222-21-8, str. 18-19, 34-27.

BEČVÁŘOVÁ, Martina. *Eukleidovy základy, jejich vydání a překlady*. Praha: Prometheus, 2002. Dějiny matematiky. ISBN 80-7196-233-3.

BINTEROVÁ, Helena, Eduard FUCHS a Pavel TLUSTÝ. *Matematika 6 pro základní školy a víceletá gymnázia*. Plzeň: Fraus, 2007. ISBN 978-80-7238-656-7, str. 19-20.

COUFALOVÁ, Jana. *Matematika pro 6. ročník základní školy*. 2., upr. vyd. Praha: Fortuna, 2007. ISBN 978-80-7168-992-8, str. 87-88.

EUKLEIDÉS. *Eukleidovy Základy [Elementa]*. Praha: Jednota českých mathematiků a fysiků, 1907, str. 1.

HAVLÍČEK, Karel. *Cesty moderní matematiky*. 2., rozš. a přeprac. vyd. Praha: Horizont, 1976. Malá moderní encyklopedie (Horizont), str. 224-229.

HEJNÝ, Milan, Pavel ŠALOM, Darina JIROTKOVÁ, Jana HANUŠOVÁ, Anna SUKNIAK, Eva BOMEROVÁ a Kateřina EICHLEROVÁ. *Matematika*. Ilustroval Lukáš URBÁNEK. Praha: H-mat, 2015-. ISBN 978-80-905756-1-5, str. 5.

HERMOCHOVÁ, Dana, Jana PRESOVÁ, Petr KAŠŠÁK, et al. *Hravá matematika 6: pracovní sešit pro 6. ročník ZŠ a víceletá gymnázia: v souladu s RVP ZV*. Praha: Taktik, 2014. ISBN 978-80-87881-18-7, str. 4, 86.

HUDCOVÁ, Milada. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ, SOU a nástavbové studium*. 2. vydání. Praha: Prometheus, 2005. ISBN 80-7196-318-6, str. 137-148, 178-192.

JEDLIČKOVÁ, Michaela, Peter KRUPKA a Jana NECHVÁTALOVÁ. *Matematika: rovinné útvary*. Ilustroval Martin BAŠAR. Brno: Nová škola, 2015. Duhová řada. ISBN 978-80-7289-7612, str. 2.

MAREŠ, Milan. *Příběhy matematiky: stručná historie královny věd*. 2., rev. vyd. Příbram: Pistorius & Olšanská, 2011. ISBN 978-80-87053-64-5.

MOLNÁR, Josef. *Matematika 6: [učebnice pro základní školy]*. Olomouc: Prodos, 1998. ISBN 80-85806-98-3, str. 58, 66.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 6. ročník základní školy: [učebnice zpracovaná podle učebních osnov vzdělávacího programu Základní škola*. Praha: Prometheus, 1997. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-092-6, str. 3-5.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Pracovní sešit z matematiky: soubor úloh pro 6. ročník základní školy*. 4., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2011. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-71964-22-3, str. 20, 28-29.

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Základní geometrické útvary: pracovní sešit z matematiky: [pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií]*. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-018-7, str.28-29, 43-44.

ODVÁRKO, Oldřich a Jana ŘEPOVÁ. *Matematika pro střední odborné školy a studijní obory středních odborných učilišť*. 5. vyd. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-039-x, str. 13, 19-20.

PALKOVÁ, Martina. *Průvodce matematikou 2, aneb, Co byste měli znát z geometrie ze základní školy*. Brno: Didaktis, 2007. Co byste měli znát ze základní školy. ISBN isbn978-80-7358-083-4, str. 13, 19-20.

POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. 9., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2008. ISBN isbn:978-80-7196-356-1, str. 102-111, 130, 164-198, 418, 421, 423, 430-431

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: planimetrie*. Dot. 2. vyd. Praha: Prometheus, 1995. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-85849-07-0.

SCRIBA, Christoph J. a Peter SCHREIBER. *5000 Years of Geometry: Matematics in History and Culture*. Basel: Projekt Group "History of Mathematics" of Hildesheim University, 2015. ISBN 978-3-0348-0897-2, str. 13-14, 25-32.

STRUIK, Dirk Jan. *Dějiny matematiky*. Praha: Orbis, 1963. Malá moderní encyklopedie (Orbis), str. 8-18, 26-33.

ŠAROUNOVÁ, Alena, Jan MAREŠ, Jitka RŮŽIČKOVÁ a Věnceslava VÄTEROVÁ. *Matematika 6*. 2. vydání. Ilustroval Martin MAŠEK. Praha: Prometheus, 2015. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-373-8, str.94.

Webové stránky

Ancient History and Civilisation: Greek and Roman Surveying and Surveying Instruments. *Ancient History and Civilisation: Greek and Roman Surveying and Surveying Instruments* [online]. Mainz, 1998, 1998 [cit. 2019-06-22]. Dostupné z: https://erenow.net/ancient/ancient-perspectives/6.php

BRŮNA, Vladimír. Základy geodézie. *Základy geodézie* [online]. Ústí nad Labem: Katedra informatiky a geoinformatiky FŽP UJEP, 2008, 2008 [cit. 2019-06-26]. Dostupné z: https://moodle.fzp.ujep.cz/mod/resource/view.php?id=4128

CENTRUM PRO ZJIŠŤOVÁNÍ VÝSLEDKŮ VZDĚLÁVÁNÍ. Maturita z matiky: Didaktické testy z matematiky. *Maturita z matiky: Didaktické testy z matematiky* [online]. Praha: Bigger, 2017, 2017 [cit. 2018-12-30]. Dostupné z: http://www.statnimaturita-matika.cz/wp-content/uploads/maturita-matematika-jaro-2017-test-novy-amos.pdf

CERMAT. Statnimaturita-matika.cz: Didaktické testy z matematiky. *Maturita z matiky: Didaktické testy z matematiky* [online]. Praha: Bigger, 2016, [cit. 2018-12-30]. Dostupné z: http://www.statnimaturita-matika.cz/wp-content/uploads/maturita-matematika-didakticky-test-zadani-2016-jaro.pdf

CERMAT. Statnimaturita-matika.cz: Didaktické testy z matematiky. *Maturita z matiky: Didaktické testy z matematiky* [online]. Praha: Bigger, 2017, [cit. 2018-12-30]. Dostupné z: http://www.statnimaturita-matika.cz/wp-content/uploads/maturita-matematika-jaro-2017-test-novy-amos.pdf

CERMAT. Statnimaturita-matika.cz: Didaktické testy z matematiky. *Maturita z matiky: Didaktické testy z matematiky* [online]. Praha: Bigger, 2015 [cit. 2019-01-01]. Dostupné z: http://www.statnimaturita-matika.cz/wp-content/uploads/matematika-test-zadani-maturita-2015-podzim.pdf

ČÁBELKA, M. Seminář z geoinformatiky: Měření vodorovných úhlů. *Seminář z geoinformatiky: Měření vodorovných úhlů* [online]. Praha: PřF UK [cit. 2019-06-22]. Dostupné z: https://www.natur.cuni.cz/geografie/geoinformatika-kartografie/ke-stazeni/vyuka/seminar-z-geoinformatiky/prednasky/9.-mereni-uhlu

Dějiny zeměměřičství: Úhly a úhloměrné přístroje. *Dějiny zeměměřičství: Úhly a úhloměrné přístroje* [online]. Ostrava: Hornicko-geologická fakulta VŠB-TU, 2019, 2019 [cit. 2019-07-02]. Dostupné z: https://docplayer.cz/68538019-Dejiny-zememerictvi-zakladni-geodeticke-veliciny-a-jejich-mereni-rndr-ladislav-planka-csc.html

FLOROVÁ, Hana. *Goniometrie v učivu středních škol* [online]. Brno, 2012 [cit. 2019-07-02]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/j2lpg/Diplomova_prace.pdf. Diplomová práce. Masarykova Univerzita, Přírodovědecká fakulta. Vedoucí práce RNDr Pavel Šišma, Dr.

Fyzmatik: Středověké GPS. *Fyzmatik: Středověké GPS* [online]. Praha: Fyzmatik, 2009, 19.5.2009 [cit. 2019-06-22]. Dostupné z: http://fyzmatik.pise.cz/892-stredoveke-gps-kvadranty-a-sextanty.html

JIRŮTKOVÁ, Petra. Základy geometrie: Euklides jako otec geometrie. *Základy geometrie: Euklides jako otec geometrie* [online]. Praha: Khan Academy, 2016, 2016 [cit. 2019-06-26]. Dostupné z: https://khanovaskola.cz/video/48/353/264-eukleides-otec-geometrie

KRYNICKÝ, Martin. Matematika ZŠ: Souhlasné a střídavé úhly. *Realistické učebnice matematiky a fyziky: když (se) chcete naučit...* [online]. Strakonice, 2010, 27. 8. 2018 [cit. 2018-11-27]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/ucebnice/03%20Matematika%20Z%C5%A0/01%206.%20ro%C4%8Dn%C3%ADk/05%20%C3%9Ahel/14%20Souhlasn%C3%A9%20a%20st%C5%99%C3%ADdav%C3%A9%20%C3%BAhly.pdf

KRYNICKÝ, Martin. Učebnice matematiky pro gymnázia: Komplexní čísla. *Učebnice matematiky pro gymnázia: Komplexní čísla* [online]. Strakonice: www.realisticky.cz, 2010, 13.7.2010 [cit. 2019-06-15]. Dostupné z: http://www.ucebnice.krynicky.cz/Matematika/06_Komplexni_cisla/2_Goniometricky_tvar_komplexnich_cisel/6206_Komplexni_cisla_jako_vektory_v_Gaussove_rovine.pdf

KRYNICKÝ, Martin. Učebnice matematiky pro gymnázia: Planimetrie. *Učebnice matematiky pro gymnázia: Planimetrie* [online]. Strakonice: www.realisticky.cz, 2010, 2010 [cit. 2019-01-27]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/ucebnice/01%20Matematika%20S%C5%A0/03%20Planimetrie/02%20Z%C3%A1kladn%C3%AD%20planimetrick%C3%A9%20v%C4%9Bty/09%20V%C4%9Bta%20o%20obvodov%C3%A9m%20a%20st%C5%99edov%C3%A9m%20%C3%BAhlu.pdf

Měření úhlů. *Měření úhlů* [online]. Ivančice: MBCalibr, spol., 2014, 2014 [cit. 2018-11-27]. Dostupné z: http://www.mbcalibr.cz/mereni-uhlu.html

MOTYČKOVÁ, Marie. Goniometrie a trigonometrie [online]. Praha, 2006 [cit. 2019-07-02]. Dostupné z: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/motyckova/Stranky_s_aplety/Uvod.html. Diplomová práce. Matematicko-fyzikální fakulta UK. Vedoucí práce RNDr Jarmila Robová, CSc.

MOTYČKOVÁ, Marie. Goniometrie a trigonometrie, orientovaný úhel: Využití internetu ve výuce goniometrie na střední škole. *Goniometrie a trigonometrie, orientovaný úhel: Využití internetu ve výuce goniometrie na střední škole* [online]. Praha: Matematicko-fyzikální fakulta UK, 2006, 2006 [cit. 2019-02-26]. Dostupné z: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/motyckova/Stranky_s_aplety/Orientovany_uhel.html

MUELANER, Jody. Simplifying complexity: Make a simple Groma. *Simplifying complexity: Make a simple Groma* [online]. Bristol: Dr Jody Muelaner, 2013, 18.7.2013 [cit. 2019-06-22]. Dostupné z: https://www.muelaner.com/measurement/make-a-simple-groma/

PROCHÁZKA, Josef. Výuka geometrie 1.0: Úhly. *Výuka geometrie 1.0: Úhly* [online]. Praha: Pedagogická fakulta UK [cit. 2019-06-21]. Dostupné z: http://it.pedf.cuni.cz/~proch/program/uhel.htm

Radián*: Radián* [online]. Praha: Howling Pixel, 2019, 2019 [cit. 2019-07-04]. Dostupné z: https://howlingpixel.com/i-cs/Radi%C3%A1n

REICHL, Jaroslav. Encyklopedie fyziky: Dějiny matematiky a fyziky. *Encyklopedie fyziky: Dějiny matematiky a fyziky* [online]. Praha: Aitis, 2018, 2018 [cit. 2018-12-25]. Dostupné z: http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/1545-nazvy-goniometrickych-funkci#

ROKYTA, Mirko. Trisekce úhlu, kvadratura kruhu a jiné podobné "nemožné úlohy". *Trisekce úhlu, kvadratura kruhu a jiné podobné "nemožné úlohy"* [online]. Praha: katedra matematické analýzy MFF UK Praha [cit. 2019-02-01]. Dostupné z: http://www.talnet.cz/documents/18/39cdd2ad-93d3-4dca-afb4-97796ebeaed8

RYBÁKOVÁ, Tereza. *Zavedení komplexních čísel v dějinách algebry* [online]. Praha, 2016 [cit. 2019-07-05]. Dostupné z: file:///C:/Users/Iveta/AppData/Local/Temp/BPTX_2014_2_11410_0_384279_0_166416.pdf. Bakalářská. Pedagogická fakulta UK. Vedoucí práce Prof. RNDr Ladislav Kvasz, DSc.Dr.

SCHEIRICH, Petr. Vesmír: Velké umění astronavigace: Od astrolábu po sextant. *Vesmír: Velké umění astronavigace: Od astrolábu po sextant* [online]. Praha: WebActive, 2018, 1. 10. 2018, **2018**(10) [cit. 2019-06-21]. ISSN 1214-4029. Dostupné z: https://vesmir.cz/cz/on-line-clanky/2018/10/velke-umeni-astronavigace-od-astrolabu-po-sextant.html

SHELL-GELLASH, Amy. Hands on History: A Resource for Teaching Mathematics. *Hands on History: A Resource for Teaching Mathematics* [online]. United States of America: The Mathematical Association of America, 2007, 2007 [cit. 2019-07-09]. Dostupné z: https://books.google.cz/books?id=V3SYQ-hOFzgC&pg=PT125&lpg=PT125&dq=egyptsk%C3%BD+groma&source=bl&ots=fsztgMWbdw&sig=ACfU3U2X97CODF934f0X3Du4f3KYBxizXA&hl

Suenee Universe: Nejstarší důkaz trigonometrie. *Suenee Universe: Nejstarší důkaz trigonometrie* [online]. Praha: Suenee Universe.cz, 2018, 2018 [cit. 2019-07-02]. Dostupné z: https://www.suenee.cz/nejstarsi-dukaz-trigonometrie-na-3700-let-stare-babylonske-tabulce/

PAVLÍK, Jan. Trigonometrie: Nejstarší důkaz trigonometrie. *Trigonometrie: Nejstarší důkaz trigonometrie* [online]. Praha: Suenee Universe, 2018, 2018 [cit. 2019-07-02]. Dostupné z: https://www.suenee.cz/nejstarsi-dukaz-trigonometrie-na-3700-let-stare-babylonske-tabulce/

School of Mathematics and statistics: Roger Cotes. *School of Mathematics and statistics: Roger Cotes* [online]. Scotland: University of St. Andrews, 2005, 2005 [cit. 2019-07-04]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Cotes.html

SUSSELMILCH, David. Planimetrie: úsekový úhel. *Planimetrie: úsekový úhel* [online]. Praha: TOPlist, 1997, 1997 [cit. 2019-01-27]. Dostupné z: http://planimetrie.kvalitne.cz/uhly_usekovy.html

ŠIMÁČEK, Jiří. Elektronická učebnice: Strojírenství. *Elektronická učebnice: Strojírenství* [online]. Olomouc: MSMT-7521/2015-40, 2015, 28.8.2015 [cit. 2019-06-15]. Dostupné z: https://eluc.kr-olomoucky.cz/verejne/lekce/1088

ŠKÁPÍKOVÁ, Jitka. *Česky a hezky: Ludolfovo číslo* [online]. 26.5.2015 [cit. 2019-07-02]. Dostupné z: https://www.rozhlas.cz/cesky/puvodslov/_zprava/ludolfovo-cislo--1580858

VLACHOVÁ, Magda. Techmania.cz: Slavní matematici, fyzici a vynálezci. *Techmania.cz: Slavní matematici, fyzici a vynálezci* [online]. Praha: vedci.wz, 2009, 2009 [cit. 2018-12-30]. Dostupné z: http://vedci.wz.cz/historie/12.htm

WALLIS, David A. History of Technology: History of Angle Measurement. *History of Technology: History of Angle Measurement* [online]. Cairo, Egypt: Pfaraohs to Geoinfrmatics, 2005 [cit. 2019-02-01]. Dostupné z: https://www.fig.net/resources/proceedings/fig_proceedings/cairo/papers/wshs_01/wshs01_02_wallis.pdf

Obrázky:

Astroláb. In: *Algernon.webzdarma.cz* [online]. 2002 [cit. 2019-06-08]. Dostupné z: https://www.google.com/search?tbm=isch&source=hp&biw=1366&bih=664&ei=zVz7XJS-GKGEmwXu445I&q=astrol%C3%A1b&oq=astrol%C3%A1b&gs_kmZsyM#imgrc=u8buwFflOWk6iM

Ciferník hodin, trojúhelník. In: *Hackmath.cz* [online]. 2019 [cit. 2019-06-27]. Dostupné z: https://www.hackmath.net/cz/priklady?q=st%C5%99edov%C3%BD+a+obvodov%C3%BD+%C3%BAhel

Dvojice úhlů. In: *Gymelg.cz* [online]. 2008, 17. 5. 2008 [cit. 2019-06-26]. Dostupné z: https://www.gymelg.cz/sites/default/files/matematika/Planimetrie1.pdf

Digitální teodolit. In: *Plastmark.cz* [online]. 2002, 29. 3. 2002 [cit. 2019-06-18]. Dostupné z: https://www.plastmark.cz/teodolit-digitalni-south-et-02

Goniometrické funkce na jednotkové kružnici. In: *Geogebra.org* [online]. 2016 10. června 2019 13:28:15 [cit. 2019-06-10]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/m/UM9UEuBR

EUKLEIDÉS. *Eukleidovy Základy [Elementa]*. Praha: Jednota českých mathematiků a fysiků, 1907, kniha 1.

Hasičské auto. In: *Vytvarna-vychova.cz* [online]. 3. 6. 2019 14:22:05 [vid. 2014]. Dostupné z: http://vytvarna-vychova.cz/hasicske-auto/

Hloubkový úhel. In:*Khanacademy.org* [online]. 2019 [cit. 2019-06-25]. Dostupné z: https://cs.khanacademy.org/math/trigonometry/trigonometry-right-triangles

Letadlo. In:*Ontola.com* [online]. 2016, 6. 6. 2016 [cit. 2019-06-27]. Dostupné z: https://www.ontola.com/cs/ondi/tavoej/goniometrie-priklad

Měření astrolábem. In: *Wikiwand.com* [online]. 2018, 23. 8. 2018 [cit. 2019-06-08]. Dostupné z: https://www.google.com/search?tbm=isch&source=hp&biw=1366&bih=664&ei=amD7XOewOdGQmwWLnJJ4&q=m%C4%9B%C5%99en%C3%AD+atrol%C3%A1bem&oq=m%C4%9B%C5%99en%C3%AD+atrol%C3%A1bem&gs_#imgrc=CVpP0BzTUYwK1M

Měření sinusovým pravítkem. In: *Eluc.kr* [online]. 1989 [cit. 2019-06-11]. Dostupné z: https://eluc.kr-olomoucky.cz/verejne/lekce/1088

Měření úhlu úhloměrem. In: *m. matikaj.webnode.cz* [online]. 2013, 19. 11. 2013 [cit. 2019-06-21]. Dostupné z: http://m.matikaj.webnode.cz/news/velikost-uhlu/

Měření vodorovného úhlu Teodolitem. In: *Natur.cuni.cz* [online]. 2012, 15. 3. 2012 [cit. 2019-05-23]. Dostupné z: https://www.natur.cuni.cz/geografie/geoinformatika-kartografie/ke-stazeni/vyuka/seminar-z-geoinformatiky/prednasky/9.-mereni-uhlu

Model Dioptru. In: *Ancientrome.ru* [online]. 1989, 27. 5. 1989 6. června 2019 19:23:07 [cit. 2019-06-06]. Dostupné z: https://www.google.com/search?tbm=isch&source=hp&biw=1366&bih=664&ei=BUv5XLKEGpKDk74PlK6TyA0&q=dioptra&oq=dioptra&gs

Model egyptského Gromy. In: *Romanaquects.info* [online]. 2004 [cit. 2019-06-08]. Dostupné z: http://www.romanaqueducts.info/technicalintro/surveyingtools.htm

Nožový úhelník. In: *Somet.cz* [online]. 2018, 25. 5. 2018 [cit. 2019-06-10]. Dostupné z: https://somet.cz/cz/uhelnik-nozovy-leskla-ocel-100x70-mm-trida-00

Obloukový úhloměr. In: *Nako.cz* [online]. 2019 [cit. 2019-06-10]. Dostupné z: https://www.nako.cz/14293-kinex-251613-uhlomer-250x400mm-nerez-1089-07-250.html#!prettyPhoto

Obloukový úhloměr digitální. In: *Somet.cz* [online]. 2018, 25. 5. 2018 [cit. 2019-06-10]. Dostupné z: https://somet.cz/cz/obloukovy-uhlomer-digitalni-0-180120x150-mm

Obvodový a úsekový úhel. In: *Planimetrie.kvalitne.cz* [online]. 12. června 2019 7:30:18 [vid]. Dostupné z: http://planimetrie.kvalitne.cz/uhly_usekovy.html

Orientovaný úhel. In: *Matematika.cz* [online]. 2006 [cit. 2019-06-12]. Dostupné z: https://matematika.cz/orientovany-uhel

Plimton 322. In: *Daily.jstor.org* [online]. 2016, 17.3.2016 [cit. 2016-03-17]. Dostupné z: https://daily.jstor.org/advanced-mathematics-of-ancient-babylon/

Plochý úhelník. In: *Bo-import.cz* [online]. 2015 [cit. 2019-06-10]. Dostupné z: https://www.bo-import.cz/meridla/uhelniky/uhelniky-ploche/uhelnik-presny-plochy-typ-kaleny

Použití kvadrantu. In: *vesmir.cz* [online]. 2018, 10. 1. 2018 21. června 2019 20:12:37 [cit. 2019-06-21]. Dostupné z: https://vesmir.cz/cz/on-line-clanky/2018/10/velke-umeni-astronavigace-od-astrolabu-po-sextant.html

Použití Sextantu. In: *vesmir.cz* [online]. 2018, 10. 1. 2018 [cit. 2019-06-21]. Dostupné z: https://vesmir.cz/cz/on-line-clanky/2018/10/velke-umeni-astronavigace-od-astrolabu-po-sextant.html

Příložný úhelník. In: *Ynářadí.cz* [online]. 2018 10. června 2019 19:00:27 [cit. 2019-06-10]. Dostupné z: https://www.ynaradi.cz/uhelnik-kinex-presny-prilozny-1000-660-trpr0-din

Radián. In: *Howlingpixel.com* [online]. 2019 [cit. 2019-04-23]. Dostupné z: https://howlingpixel.com/i-cs/Radi%C3%A1n

Ramsdenův Teodolit. In: *Sciencephot.com* [online]. 2019, 1. 3. 2019 [cit. 2019-06-06]. Dostupné z: https://www.google.com/search?tbm=isch&source=hp&biw=1366&bih=664&ei=s0T5XIXoGsOQmwWMu66IDg&q=Ramsden+Great+Theodolite&oq=Ramsden+Great+Theodolite&gs

Sextant. In: *Oceanusbrass.com* [online]. 2019 [cit. 2019-06-08]. Dostupné z: https://www.google.com/search?tbm=isch&source=hp&biw=1366&bih=664&ei=S2L7XIbUJOyFmwXS773YBA&q=sextant&oq=sextant&gs_l=img.

Schéma repetičního Teodolitu. In: *Uhulag.mendelu.cz* [online]. 2013 [cit. 2019-06-22]. Dostupné z: http://uhulag.mendelu.cz/files/pagesdata/cz/geodezie/geodezie1/mereni_uhlu.pdf

Sinusové pravítko. In: *Amazon.de* [online]. 1998 [vid. 2019-06-10]. Dostupné z: https://www.amazon.de/Helios-Preisser-Sinuslineal-Anschlag-100mm-0513001/dp/B00RBL7XK6

Úhlové měrky. In: *Somet.cz* [online]. 2018, 25. 5. 2018 [cit. 2019-06-10]. Dostupné z: https://somet.cz/cz/sada-uhlovych-merek-14-30

Teodolit z roku 1850. In: *Dorotheum.cz* [online]. 2014, 5. 5. 2014 22. června 2019 17:41:52 [cit. 2019-06-22]. Dostupné z: https://www.dorotheum.com/cz/l/3871111/

Univerzální úhloměr digitální. In: *Mitutoyo.eu* [online]. 2019 [cit. 2019-06-10]. Dostupné z: https://shop.mitutoyo.cz/web/mitutoyo/cs_CZ/mitutoyo/01.05.051/Univerz%C3%A1ln%C3%AD%20%C3%BAhlom%C4%9Br%20DIGIMATIC/$catalogue/mitutoyoData/PR/187-502/index.xhtml;jsessionid=080603192F6849D759B578F7F431A5ED

Univerzální úhloměr s lupou. In: *Mitutoyo.eu* [online]. 2019 [cit. 2019-06-10]. Dostupné z: https://shop.mitutoyo.eu/web/mitutoyo/cs/mitutoyo/01.05.05/Univerz%C3%A1ln%C3%AD%20%C3%BAhlom%C4%9Br/$catalogue/mitutoyoData/PR/187-908/index.xhtml

Vyměřování pravého úhlu pomocí Gromy. In: Muelaner.com [online]. 2013, 18. 7. 2013 [cit. 06-06-2019]. Dostupné z: https://www.muelaner.com/measurement/make-a-simple-groma/

Vysílač. In: *Prostor-ad.cz* [online]. 2008 [vid. 2019-06-13]. Dostupné z: https://www.prostor-ad.cz/pruvodce/pvychod/cbrod/vysilac.htm#A

Výškový úhel. In:*Khanacademy.org* [online]. 2019 [cit. 2019-06-25]. Dostupné z: https://cs.khanacademy.org/math/trigonometry/trigonometry-right-triangles

Zorný úhel. In:*Khanacademy.org* [online]. 2019 [cit. 2019-06-25]. Dostupné z: https://cs.khanacademy.org/math/trigonometry/trigonometry-right-triangles

Pokud není uvedeno jinak, autorkou obrázků je Iveta Michálková